

THESES

présentées

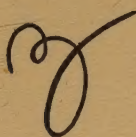
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

Serge DUBIGEON



1^{ère} THESE : Détermination des matrices de couplage M-B-K des systèmes quasi-linéaires du second ordre par excitation harmonique équi-phase « Méthode de la réponse équi-phase »

2^{ème} THESE : *Propositions données par la Faculté.*

Soutenues le

14 JUIN 1966

 devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU

Président

M. RAVILLY

M. MEZENCEV

} Examineurs

THESES

présentées

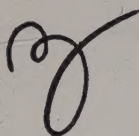
à la Faculté des Sciences de l'Université de Nantes

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR-INGENIEUR

par

Serge DUBIGEON



1^{ère} THESE : Détermination des matrices de couplage M-B-K des systèmes quasi-linéaires du second ordre par excitation harmonique équi-phase « Méthode de la réponse équi-phase »

2^{ème} THESE : Propositions données par la Faculté.

14 JUIN 1966

Soutenues le

devant la Commission d'Examen

M. PIRONNEAU

Président

M. RAVILLY

M. MEZENCEV

} Examinateurs

UNIVERSITE de NANTES

FACULTE DES SCIENCES

Doyen M. BRILLOUET

Assesseur M. GARRIGUES

Professeurs Titulaires

MM. BRILLOUET

Mathématiques

PAUC

"

PETRESCU

"

PIRONNEAU

"

RAFFIN

"

RAVILLY

"

BOULLLOUD

Physique

COLLET

"

DUNOYER

Chimie

GRAFF

"

Mlle DEBRAUX

Biologie

MM. GARRIGUES

"

PIERI

"

SELLIER

"

Professeurs et Maîtres de Conférences

MM. MOLINARO

Mathématiques

VIVIER

"

AVIGNON

Physique

GOUREAUX

"

GRANGE

"

LASKAR

"

MEZENECV

"

MOUTON

"

MINN

"

Mlle OFFRET

"

MM. GOBIN

Chimie

JOLIVET

"

MARTIN

"

POINTEAU

"

QUINIOU

"

ROUXEL

"

WOJKOWIAK

"

AMOURIQ

Biologie

Mlle ASTIE

"

MM. DUPONT

"

LE DOUARIN

"

CAVET

Géologie

FORESTIER

"

OTTMANN

"

Secrétaire

M. PAILLET

AVANT-PROPOS

Avant d'entreprendre la rédaction de cet ouvrage, j'ai voulu, dans une certaine mesure, me rendre compte de ce qu'il y avait de mieux à dire sur ce sujet de la part de nos contemporains.

C'est à cette lecture que j'ai découvert l'ouvrage de M. H. L. L., qui me paraît être, en ce moment, le plus intéressant. Toutes les questions qui se posent sont traitées avec une lucidité et une franchise qui me paraissent être les seules qui puissent donner une véritable idée de la situation.

C'est pourquoi j'ai voulu me permettre de traduire, en français, les conclusions auxquelles j'ai parvenu, et de les présenter à nos contemporains, dans la mesure de ce que j'ai pu en apprendre.

Ceci est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre.

Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre.

Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre.

Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre.

Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre.

Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre. Il est, bien entendu, un résumé de ce que j'ai pu en apprendre.

AVANT - PROPOS

Avant d'exposer le résultat de ces trois années de recherches, nous voudrions remercier tous ceux qui ont participé à ce travail et nous ont permis de le mener à bien.

C'est à Monsieur le Professeur PIRONNEAU, Directeur de l'E.N.S.M. que nous adressons, en premier lieu, nos remerciements. Toutes les expériences ont été effectuées dans son Laboratoire de Mécanique des Structures où nous avons toujours trouvé les meilleures conditions morales et matérielles.

C'est lui qui a guidé nos premiers pas dans la recherche, spécialement dans le domaine théorique, nous a suggéré les expériences permettant de vérifier la valeur de la théorie et nous a constamment encouragé et conseillé.

Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de toute notre gratitude.

Nous tenons à remercier spécialement Monsieur MEZENECV, Professeur à l'ENSM qui nous a fait l'honneur de suivre nos travaux et qui nous a souvent conseillé pour la mise au point de la partie électronique de notre thèse.

Nous avons à coeur de témoigner nos vifs remerciements à Monsieur ETIENNE des Etablissements BRISSONNEAU et LOTZ et à son personnel qui ont bien voulu nous fournir les circuits imprimés.

Nous n'oublions pas de mentionner dans nos remerciements le personnel technique de l'E.N.S.M. qui nous a aidé dans la réalisation pratique et spécialement M. CHAGNEAU du Laboratoire de Mécanique, dont nous avons pu souvent apprécier l'habileté.

Nous remercions vivement le service de l'imprimerie de l'E.N.S.M. qui a su réaliser avec goût et compétence la bonne présentation de ce rapport.

INTRODUCTION

La détermination des matrices de couplage d'un système mécanique régi par l'équation matricielle à coefficients constants :

$$M \ddot{X} + B \dot{X} + K X = F$$

est un des problèmes majeurs qui se pose en Aéronautique. Son importance est primordiale car la connaissance de ces matrices permet de prévoir la réponse complète d'une structure à n'importe quelle sollicitation extérieure.

Cette question a été l'objet de nombreux travaux (voir références bibliographiques) dont nous allons résumer en quelques lignes l'évolution.

L'ONERA s'est spécialement intéressé au problème et a mis au point une méthode globale dont la synthèse a fait l'objet d'une récente publication de M. BEATRIX (n° 109 R A).

Toutes les méthodes font en général appel à une excitation harmonique, la matrice μ des masses généralisées est déterminée par le procédé des fréquences déplacées (ou glissement de fréquence) .

Le procédé anciennement utilisé : la méthode des masses additionnelles décrites dans les articles de MM. de VRIES, LECLERC et GAUZY, a été progressivement remplacé par celui des raideurs électriques (de VRIES) .

Une autre méthode mise au point par M. Daniel CLERC consiste à rétablir en apparence la résonance de phase au voisinage de chaque fréquence propre par injection dans la colonne des seconds membres de forces en quadrature avec les forces initiales d'excitation. La méthode a été étendue par l'auteur au cas où la matrice généralisée d'amortissement β ne se diagonalise pas dans la base diagonalisant M et K (c'est-à-dire quand la structure ne vérifie pas l'hypothèse de BASILE).

Dans les deux cas, la connaissance de μ permet de déterminer les matrices de raideur γ et d'amortissement β lorsqu'on connaît les modes propres et les sollicitations qui les créent.

Les résultats des calculs de la matrice de raideur peuvent être comparés aux résultats donnés par la méthode des coefficients d'influence; ceux de la matrice des masses à ceux fournis par un devis en poids ; quant à la matrice d'amortissement, il n'existe pas, à notre connaissance, de théorie permettant de la calculer et de la confronter avec l'expérience . Les études, fort intéressantes, publiées jusqu'ici par MM. SALAUN , BEATRIX et GAUZY portent sur des systèmes à deux degrés de liberté satisfaisant souvent à l'hypothèse de BASILE, ou non linéaires .

Nous proposons ici une autre méthode globale, dont le point de départ est la détermination de la matrice d'amortissement, en utilisant la méthode, dite de réponse équiphase. La résonance que nous introduisons coïncide aux fréquences de résonance du système non amorti avec la résonance de phase habituelle. Nous n'introduisons, ni perturbations sur M , ni excitation en quadrature. Nous cherchons à avoir toutes les variables de sorties en phase ou en opposition de phase.

En fait, une telle notion avait déjà été introduite par M.FRAEJIS de VEUBEKE

(Symposium International IUTAM sur les « récents progrès de la mécanique des vibrations linéaires - Réf. R F M n° 14) . Nous avons, ici, déterminé au second ordre près au voisinage de certains points, les courbes de « Réponse équiphase » qui coïncident avec les courbes de « déphasages caractéristiques » dont l'existence a été signalée par M. de VEUBEKE.

Les propriétés particulières de ces courbes algébriques (Première partie) permettent , comme nous le démontrons et comme nous l'avons vérifié sur trois exemples dans les pages qui suivent (Deuxième partie) de déterminer simultanément les matrices de couplage d'un système différentiel linéaire du second ordre à n variables.

$$\begin{array}{c} \div \\ \div \quad \div \\ \div \end{array}$$

PREMIERE PARTIE

**ANALYSE HARMONIQUE DES SYSTEMES A UN NOMBRE FINI
DE DEGRES DE LIBERTE PAR LA « METHODE DE REPOSE EQUIPHASE »**

Chapitre I

ETUDE MATHEMATIQUE DES SOLUTIONS DANS LA BASE PROPRE

On sait que, mise sous forme canonique, l'équation matricielle d'un système différentiel du second ordre, linéaire, s'écrit sous la forme :

$$MX'' + BX' + KX = E \quad (1)$$

E étant appelé colonne des seconds membres
X étant la colonne des inconnues .

Les matrices M et K étant diagonales puisque l'on est dans la base propre, la matrice B quelconque .

La réponse forcée du système à une excitation généralisée équiphase $E = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \end{bmatrix} \cos \omega t = F \cos \omega t$, ω étant quelconque, est de la forme :

$$X = \begin{bmatrix} \vdots \\ X_j (\alpha_j \cos \omega t + \sin \omega t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Nous allons montrer qu'en choisissant convenablement les F_j on peut obtenir toutes les réponses en phase, c'est-à-dire réaliser $\alpha_j = \alpha_k = \alpha \forall j, k$.

Posons
$$\begin{cases} X = [X_\alpha] (\alpha \cos \omega t + \sin \omega t) = [X_\alpha] \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\sin \varphi} \\ \alpha = \cotg \varphi \end{cases} \quad (2)$$

X_α étant une matrice unicolonne .

$$X' = [X_\alpha] [-\alpha \omega \sin \omega t + \omega \cos \omega t]$$

$$X'' = [X_\alpha] [-\alpha \omega^2 \cos \omega t - \omega^2 \sin \omega t]$$

D'où en portant dans l'équation (1) et en identifiant les termes en sinus et cosinus

$$[(K - \omega^2 M) \alpha + B \omega] \cdot X_\alpha = F \quad (1')$$

$$[K - \omega^2 M - \alpha \omega B] \cdot X_\alpha = 0 \quad (2')$$

Pour une fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ la relation (2') montre que α est valeur propre de l'équation matricielle

$$[K - \omega^2 M] X = \alpha [\omega B] X$$

— X_α est vecteur propre correspondant.

Il existe, en général, n valeurs de α telles que la relation (2') soit vérifiée.

α et ω étant fixés, X_α est et la relation (1') montre que F est unique.

REMARQUE - Considérons le cas très particulier où $\alpha = 0$; soient F^* et X_0^* les vecteurs correspondants.

$$\text{Nous avons } B \omega X_0^* = F^* \quad (1'')$$

$$[K - M \omega^2] X_0^* = 0 \quad (2'')$$

Le système vibre alors selon un des « modes propres » du système non amorti ; il y a résonance de phase.

Avant d'étudier le cas général, nous allons étudier un cas particulier.

$$\begin{array}{c} \div \\ \div \quad \div \\ \div \end{array}$$

- 1 Etude du problème quand l'hypothèse de Basile est vérifiée.

Rappelons que l'hypothèse de Basile est celle-ci : dans la base propre la matrice B est diagonale.

La relation (1) s'écrit :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ m_j x_j'' + b_{jj} x_j' + k_{jj} x_j = F_j \cos \omega t \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}$$

j : indice de ligne

j : indice de colonne

La relation (1') s'écrit :

$$\begin{array}{l} \text{et (2')} \left[\begin{array}{c} (k_j - m_j \omega^2) \alpha + b_{jj} \omega \\ \vdots \\ (k_j - m_j \omega^2) - \alpha \omega b_{jj} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} X_\alpha \\ \vdots \\ X_\alpha \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \\ (2') \Rightarrow \alpha_j = \frac{k_j - m_j \omega^2}{\omega b_{jj}} \quad \text{et } X_i = 0 \quad i \neq j \quad \text{si } \alpha = \alpha_j \Rightarrow X_\alpha = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ X_j \\ 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$(1') \quad F_i = 0 \quad i \neq j \quad \text{et} \quad F_j = \left[\frac{(k_j - m_j \omega^2)^2}{\omega b_{jj}} + \omega b_{jj} \right] X_j \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_j \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour un déphasage α_j le système vibre suivant le mode correspondant comme s'il était découplé.

Pour $\alpha = 0$ (résonance de phase) on retrouve les formules classiques $\omega = \omega_j$

$$F_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}} b_{jj} X_j$$

$$F_i = 0$$

et en normant les déplacements : $X_j = 1$ on a la matrice des modes $\mathcal{Z}$ et la matrice $\mathcal{F}$ correspondante dans la base considérée

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ b_{jj} & & & \\ & & \sqrt{\frac{k_j}{m_j}} & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Etude des courbes $\alpha(\omega)$

$$\alpha_j = \frac{k_j - m_j \omega^2}{\omega b_{jj}}$$

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = - \frac{(k_j + m_j \omega^2)}{\omega^2 b_{jj}}$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\omega^2} = \frac{2k_j}{\omega^3 b_{jj}}$$

ω	0	$\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}}$	$+\infty$
α	$+\infty$	0	$-\infty$
$\frac{d\alpha}{d\omega}$	$-\infty$	$-\frac{2m_j}{b_{jj}}$	$-\frac{m_j}{b_{jj}}$
$\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}$		$-\frac{2m_j}{\omega_j^3 b_{jj}}$	

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\alpha + \frac{m_j}{b_{jj}} \omega \right) = 0$$

D'où l'asymptote de pente $-\frac{m_j}{b_{jj}}$ passant par l'origine.

Les courbes $\alpha_j(\omega)$ sont des hyperboles, la tangente en ω_j est direction conjuguée de l'axe des ω (fig. 1) (v. page suivante)

En somme pour une pulsation ω donnée, nous avons n valeurs de α possibles, généralement distinctes, apparaissant dans un ordre quelconque par rapport aux ω_j associés.

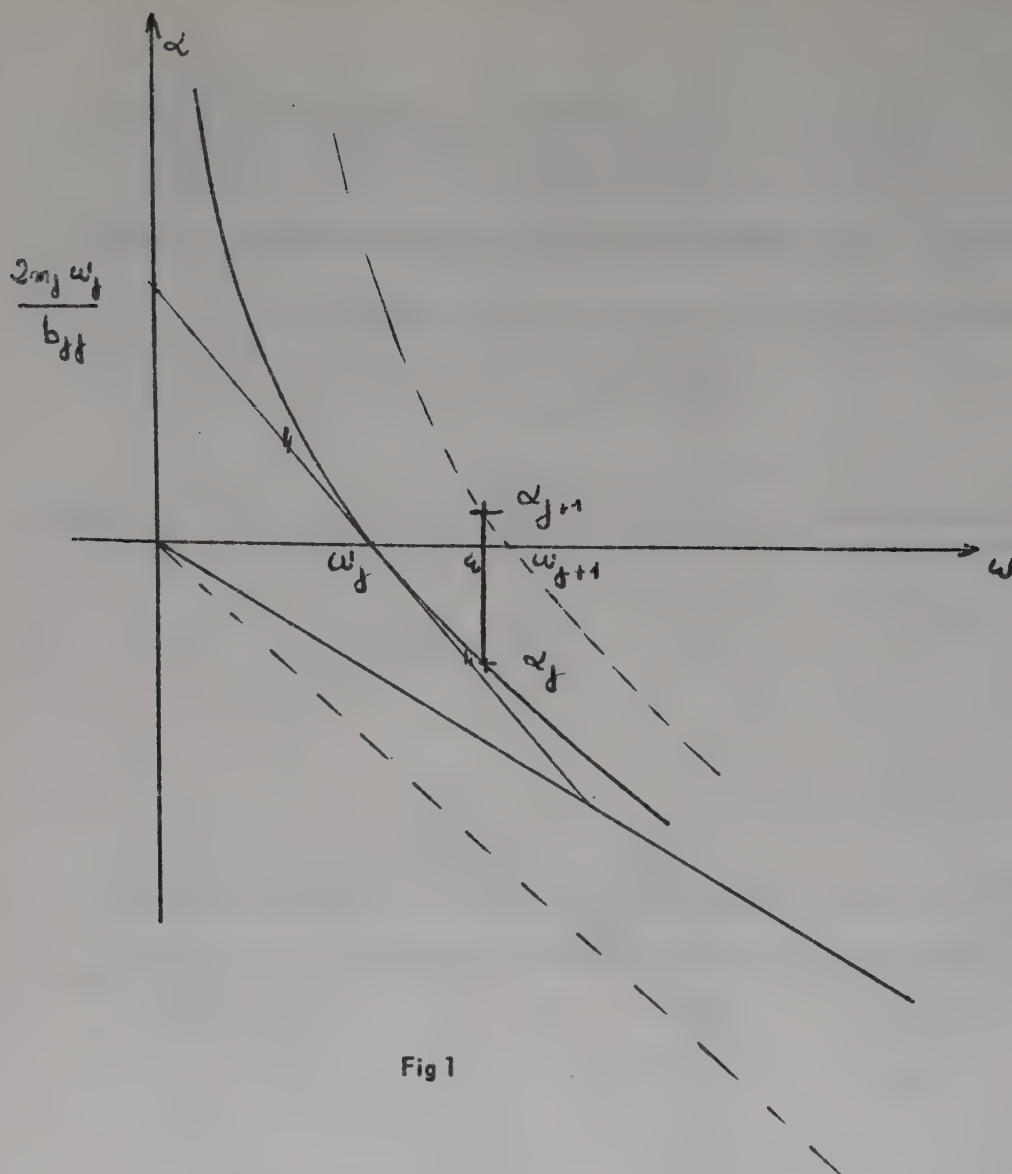


Fig 1

Etude des courbes $\varphi(\omega)$

Nous avons $\cotg \varphi = \alpha \Leftrightarrow \varphi \pmod{\pi} = \text{Arc tg } \frac{1}{\alpha}$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{d\varphi}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\omega} = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha^2}} \frac{k_j + \omega^2 m_j}{\omega^2 b_{jj}} = \frac{(k_j + \omega^2 m_j) b_{jj}}{(k_j - \omega m_j)^2 + \omega^2 b_{jj}^2} \quad (\text{positif})$$

Prenons la détermination $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\alpha = 0$ si $\omega = \omega_j$

ω	0	ω_j	$+\infty$
φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{d\varphi}{d\omega}$	$\frac{b_{jj}}{k_j}$	$\frac{2}{b_{jj} m_j}$	0

D'où l'allure des courbes $\varphi(\omega)$ (fig. 2)

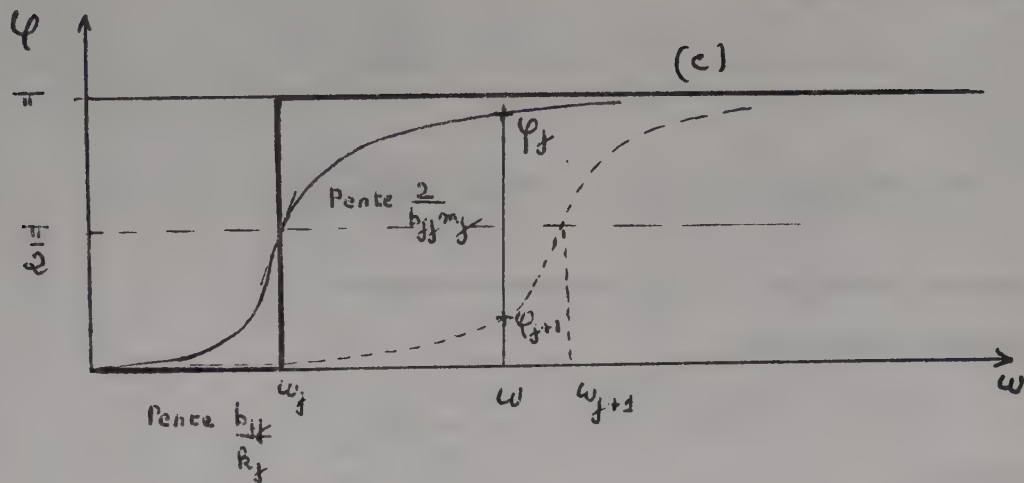


Fig. 2

La courbe (C) correspondrait à un amortissement b_{jj} nul (Matrice B singulière).

Nous pouvons constater qu'au voisinage des ω_j les φ_j sont bien « séparés ».

- 2 Étude du problème lorsque l'hypothèse de Basile n'est pas vérifiée

Dans la base propre la matrice B est quelconque.

Envisageons d'abord quelques cas particuliers :

2.1 Systèmes d'ordre deux.

a) Matrice B quasi diagonale b_{12} et $b_{21} < b_{11}$ et b_{22}

Le système matriciel s'écrit :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{X} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \dot{X} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} F \\ F \end{bmatrix} \cos \omega t$$

Nous posons : $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$, $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$

α est solution de l'équation dét. $|K - \omega^2 M - \alpha \omega B| = 0$

$$(E) \equiv \alpha^2 \omega^2 (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) - \alpha \omega [b_{11}(k_2 - m_2 \omega^2) + b_{22}(k_1 - m_1 \omega^2)] + (k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) = 0$$

Dét.B

$b_{12} b_{21}$ est négligeable au deuxième ordre près devant $b_{11} b_{22}$; nous constatons qu'aucun des termes b_{ij} n'apparaît dans le reste de l'équation, donc :

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{k_1 - m_1 \omega^2}{\omega b_{11}} \quad \alpha_2 = \frac{k_2 - m_2 \omega^2}{\omega b_{22}}}$$

Pour $\alpha = \alpha_1$ X est tel que :

$$\begin{bmatrix} 0 & -(k_1 - m_1 \omega^2) \frac{b_{21}}{b_{11}} \\ -(k_1 - m_1 \omega^2) \frac{b_{12}}{b_{11}} & [(k_2 - m_2 \omega^2) - (k_1 - m_1 \omega^2) \frac{b_{22}}{b_{11}}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La première solution donne $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (linéarisation trop brutale)

La deuxième solution donne : $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(k_1 - m_1 \omega^2) b_{12}}{(k_2 - m_2 \omega^2) b_{11} - (k_1 - m_1 \omega^2) b_{22}} \end{bmatrix}$

F est tel que

$$\begin{bmatrix} \frac{(k_1 - m_1 \omega^2)^2}{\omega b_{11}} + \omega b_{11} & \omega b_{21} \\ \omega b_{12} & \frac{(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) + b_{22} \omega}{\omega b_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{(k_1 - m_1 \omega^2) b_{12}}{(k_2 - m_2 \omega^2) b_{11} - (k_1 - m_1 \omega^2) b_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix}$$

$$[F_1] = \begin{bmatrix} \frac{(k_1 - m_1 \omega^2)^2}{\omega b_{11}} + \omega b_{11} \\ \frac{b_{12} [(k_1 - m_1 \omega^2)^2 + b_{11}^2 \omega^2] (k_2 - m_2 \omega^2)}{[(k_2 - m_2 \omega^2) b_{11} - (k_1 - m_1 \omega^2) b_{22}] \omega b_{11}} \end{bmatrix}$$

ceci en première approximation .

Nous aurions des conclusions analogues pour $\alpha = \alpha_2$

Donc les b_{ij} apportent une contribution du premier ordre sur les F et les X et du second sur les α .

b) Matrice B Gyroscopique (Antisymétrique)

Nous savons que dans ce cas le système est conservatif .

Soit $B = G = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ et posons $\omega_1^2 < \omega_2^2$

L'équation en α devient :

$$(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) + \alpha^2 \omega^2 b^2 = 0 \quad (\text{pas de termes en } \alpha)$$

Les racines en α n'existent que pour $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1} < \omega^2 < \frac{k_2}{m_2}$

Dans ce cas, considérons la détermination positive

$$\alpha = \frac{1}{\omega b} \sqrt{-(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2)} = \frac{1}{\omega b} \sqrt{R}$$

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = -\frac{1}{\omega^2 b} \sqrt{R} + \frac{1}{b\sqrt{R}} [(k_1 - m_1 \omega^2)m_2 + (k_2 - m_2 \omega^2)m_1] = \frac{1}{b\omega^2 \sqrt{R}} (-\omega^4 m_1 m_2 + k_1 k_2)$$

ω	ω_{01}	$\sqrt{\omega_{02} \omega_{01}}$	ω_{02}
α	0	α_m	0
$\frac{d\alpha}{d\omega}$	$+\infty$	0	$-\infty$

$$\alpha_m \text{ est tel que } (k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) + \alpha_m^2 \omega^2 b^2 = 0$$

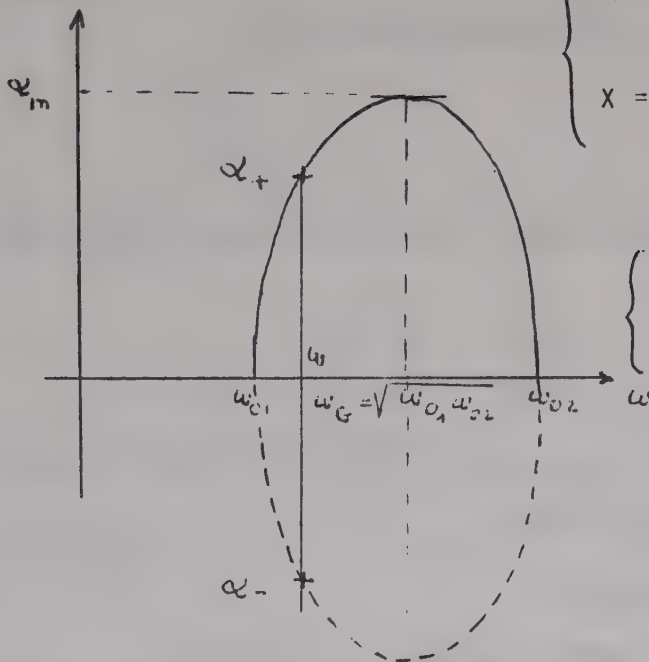
$$k_1 k_2 + m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1) \omega^2 + \alpha_m^2 \omega^2 b^2 = 0$$

$$2 \frac{k_1 k_2}{\omega_{01} \omega_{02}} - m_1 m_2 (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) + \alpha_m^2 b^2 = 0$$

$$\alpha_m^2 b^2 = \frac{k_1 k_2}{\omega_{01} \omega_{02}} (\omega_{01} - \omega_{02})^2$$

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{b}} (\omega_{02} - \omega_{01})$$

$\cotg \varphi = \alpha$



$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_m = \sqrt{m_1 m_2} \frac{(\omega_{02} - \omega_{01})}{b} \\ X = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{k_1 \omega_{02}}{k_2 \omega_{01}}} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ F = \begin{bmatrix} b \omega_{02} \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Fig. 3

α varie très rapidement au voisinage des fréquences de résonances du système non amorti et est sensiblement constant au voisinage de leur moyenne géométrique; pour une valeur de ω comprise entre ω_{01} et ω_{02} il existe deux solutions symétriques en α (Fig. 3)

Pour $(\alpha+)$ X est tel que :

$$\begin{bmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 & -\omega b \alpha \\ \omega b \alpha & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \omega \end{bmatrix} = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} X \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\omega b \alpha}{k_2 - m_2 \omega^2} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_1 - m_1 \omega^2}{\alpha \omega b} \end{bmatrix}$$

$$\text{Or : } \frac{-\omega b \alpha}{k_2 - m_2 \omega^2} = -\sqrt{\frac{-k_1 - m_1 \omega^2}{k_2 - m_2 \omega^2}} \quad \text{et} \quad \frac{k_1 - m_1 \omega^2}{\alpha \omega b} = -\sqrt{\frac{k_1 - m_1 \omega^2}{k_2 - m_2 \omega^2}}$$

$$\text{car } k_1 - m_1 \omega^2 < 0$$

$$\text{Soit } X = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{k_1 - m_1 \omega^2}{k_2 - m_2 \omega^2}} \end{bmatrix} \quad X = \omega_G = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{k_1 \omega_{02}}{k_2 \omega_{01}}} \end{bmatrix}$$

F est tel que

$$\begin{bmatrix} (k_1 - m_1 \omega^2) \alpha & b \omega \\ -b \omega & (k_2 - m_2 \omega^2) \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{k_1 - m_1 \omega^2}{k_2 - m_2 \omega^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \frac{k_1 - m_1 \omega^2}{\omega b} - \sqrt{(k_2 - m_2 \omega^2)(k_1 - m_1 \omega^2)} - b \omega \sqrt{\frac{k_1 - m_1 \omega^2}{k_2 - m_2 \omega^2}} = \frac{1}{\omega b} \sqrt{\frac{k_1 - m_1 \omega^2}{k_2 - m_2 \omega^2}} [(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - b^2 \omega^2]$$

$$F_2 = -b \omega - \frac{k_2 - m_2 \omega^2}{\omega b} \sqrt{(k_1 - m_1 \omega^2)^2} = \frac{-b^2 \omega^2 + (k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2)}{\omega b}$$

$$\text{D'où } F_2 = \sqrt{\frac{k_2 - m_2 \omega^2}{k_1 - m_1 \omega^2}} F_1$$

En conclusion nous pouvons remarquer que pour $\omega = \omega_{02}$, b peut être déterminé expérimentalement.

En effet :

$$\text{Pour } \omega = \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} b \omega_{02} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Des mesures effectuées au point (ω_G, α_m) permettraient alors de déterminer k_1, k_2, m_1, m_2 .

Pour $(\alpha-)$ nous aurions des solutions analogues.

c) Cas d'une matrice B singulière

L'équation (E) n'a plus de termes en α^2 et admet deux solutions :

$$(1) \quad \alpha = \frac{(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2)}{\omega [b_{11}(k_2 - m_2 \omega^2) + b_{22}(k_1 - m_1 \omega^2)]}$$

$$(2) \quad \alpha = \infty \quad \text{soit une solution } X = [X] \cos \omega t$$

Etude de la solution en cos ωt

Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} x'' + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \cos \omega t$$

Posons $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \cos \omega t$, $X' = -\omega \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sin \omega t$, $X'' = -\omega^2 \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \cos \omega t$

D'où en identifiant les termes en $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$:

$$\begin{bmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 & 0 \\ 0 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \text{ et } \omega \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

singulière par
hypothèse

$$\begin{bmatrix} [X] \\ [F] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{b_{11}}{b_{21}} \\ k_1 - m_1 \omega^2 \\ -\frac{b_{11}}{b_{21}} (k_2 - m_2 \omega^2) \end{bmatrix}$$

Donc, quel que soit ω , le vecteur réponse $[X]$ normé est le même ; sa mesure permettrait de déterminer le rapport $\frac{b_{11}}{b_{21}}$

Etude de la solution en cos $(\omega t - \varphi)$

$$\alpha = \frac{(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2)}{\omega [b_{11} k_2 + b_{22} k_1 - (m_1 b_{22} + m_2 b_{11}) \omega^2]} \quad \text{est indépendant des } b_{ij}$$

Nous remarquons deux asymptotes verticales

$$\omega = 0$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{b_{22} k_1 + b_{11} k_2}{m_1 b_{22} + m_2 b_{11}}} \quad \text{on vérifie facilement } \omega_{11} < \omega_d < \omega_{02}$$

(Pour $\omega = \omega_d$, seule est à retenir la solution en $\cos \omega t$)

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{1}{\omega^2 [b_{11}k_2 + b_{22}k_1 - (m_1b_{22} + m_2b_{11})\omega^2]^2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\omega^2 [b_{11}(k_2 - m_2\omega^2) + b_{22}(k_1 - m_1\omega^2)] [(k_1 - m_1\omega^2)m_2 + (k_2 - m_2\omega^2)m_1] \\ -(k_1 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) [b_{11}(k_2 - m_2\omega^2) + b_{22}(k_1 - m_1\omega^2) - 2\omega(b_{11}m_2 + b_{22}m_1)] \end{array} \right\}$$

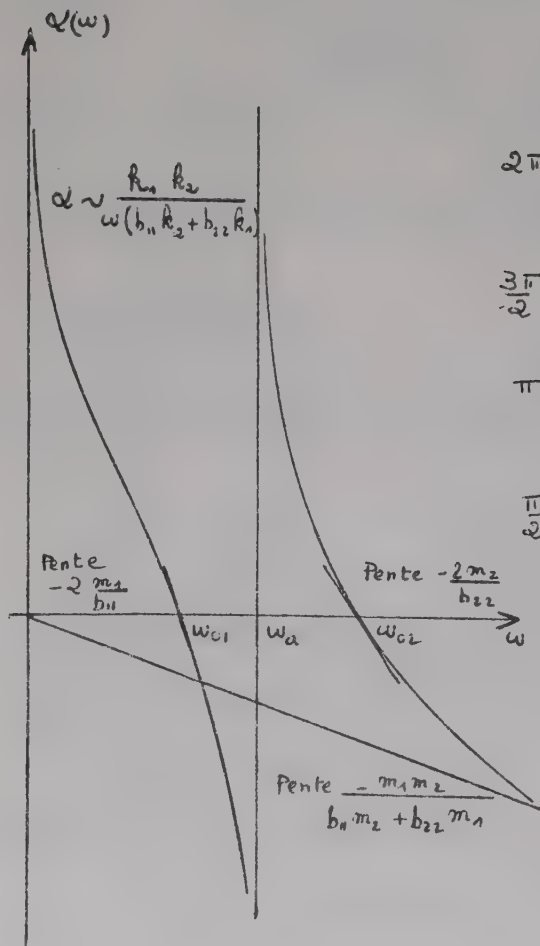
$$\left[\frac{d\alpha}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_{01}} = \frac{m_1}{k_1 [b_{11}(k_2 - m_2\omega^2)]^2} \cdot \left\{ -2 \frac{k_1}{m_1} (k_2 - m_2\omega^2)^2 b_{11}m_1 \right\} = -\frac{2m_1}{b_{11}}$$

Les pentes aux points $(0, \omega_i)$ sont indépendantes des b_{ij}

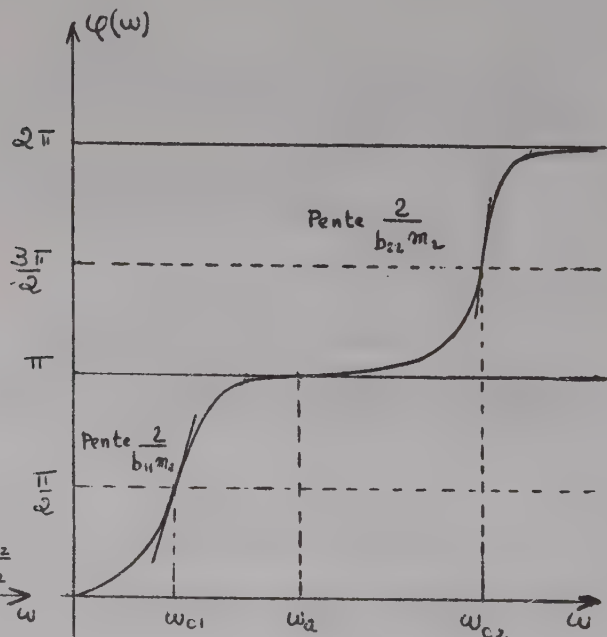
$$\text{de même } \left[\frac{d\alpha}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_{02}} = -\frac{2m_2}{b_{22}}$$

La courbe (fig. 4) possède deux branches et une asymptote passant par l'origine car si ω est élevé,

$$\alpha \sim \frac{-m_1m_2\omega}{b_{11}m_2 + b_{22}m_1} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\alpha + \frac{m_1m_2\omega}{b_{11}m_2 + b_{22}m_1} \right) = 0.$$



- Fig. 4 a -



Nous avons choisi

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ pour } \omega = \omega_{02}$$

- Fig 4 b -

Nous allons montrer maintenant que la courbe unique que nous avons trouvée est formée des deux courbes ordinaires, dégénérées, en considérant le cas où $\det. B = \varepsilon \neq 0$.

L'équation (E) s'écrit :

$$\alpha^2 \omega^2 \varepsilon - \alpha \omega [b_{11}k_2 + b_{22}k_1 - \omega^2(m_1b_{22} + m_2b_{11})] + [k_1 - m_1\omega^2](k_2 - m_2\omega^2) = 0$$

Etude des branches infinies

Soit $\varphi_n(\omega, \alpha)$ le groupe homogène de degré n .

$$\varphi_4(\omega, \alpha) = \omega^2 [\alpha^2 \varepsilon + \alpha \omega (b_{11}m_2 + b_{22}m_1) + m_1m_2\omega^2]$$

$$\varphi_3(\omega, \alpha) = 0$$

Nous concluons que $\omega=0$ est asymptote verticale comptée deux fois et qu'il existe deux directions asymptotiques solutions de $\varphi_4(1, t) = 0$.

$\varphi_4(1, t) = 0$ admet deux solutions t_1 et t_2 ; nous trouvons après développement en série :

$$t_1 = - \frac{b_{11}m_2 + b_{22}m_1}{\varepsilon} + \frac{m_1m_2}{b_{11}m_2 + b_{22}m_1} + \frac{(m_1m_2)^2}{(b_{11}m_2 + b_{22}m_1)^3} \frac{\varepsilon}{4} + \dots$$

$$t_2 = - \frac{m_1m_2}{b_{11}m_2 + b_{22}m_1} - \frac{(m_1m_2)^2}{(b_{11}m_2 + b_{22}m_1)^3} \frac{\varepsilon}{4} + \dots$$

avec $\varepsilon = \det. B$ pour ω très élevé.

Ces asymptotes de pente t_1 et t_2 passent par l'origine car $\varphi_3(\omega, \alpha) = 0$

Etude au voisinage de $\omega = \omega_0$

L'équation (E) s'écrit :

$$\alpha^2 \omega_0^2 \varepsilon + (k_1 - m_1 \omega_0^2)(k_2 - m_2 \omega_0^2) = 0$$

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{(k_1 - m_1 \omega_0^2)(k_2 - m_2 \omega_0^2)}{-\omega_0^2 \det B}} \quad \text{avec } \omega_0 \text{ indépendant des } b_{ij}$$

A partir de ces résultats nous pouvons tracer les deux courbes α_1, α_2 pour un déterminant B très faible et apprécier l'influence de $\det. B$. Ces courbes se déforment de façon continue si ε tend vers zéro (fig. 5).

Le cas $\det. B = 0$ apparaît donc comme un cas limite. Il est remarquable de constater que les pentes des courbes au voisinage de ω_{01} et ω_{02} ne font intervenir que les b_{ij} ; nous allons montrer, dans la suite de l'exposé, qu'en général, quelle que soit la valeur des b_{ij} et l'ordre des matrices, il en est toujours ainsi pour $\omega = \omega_{0i}$ à condition que b_{ij} soit non nul.

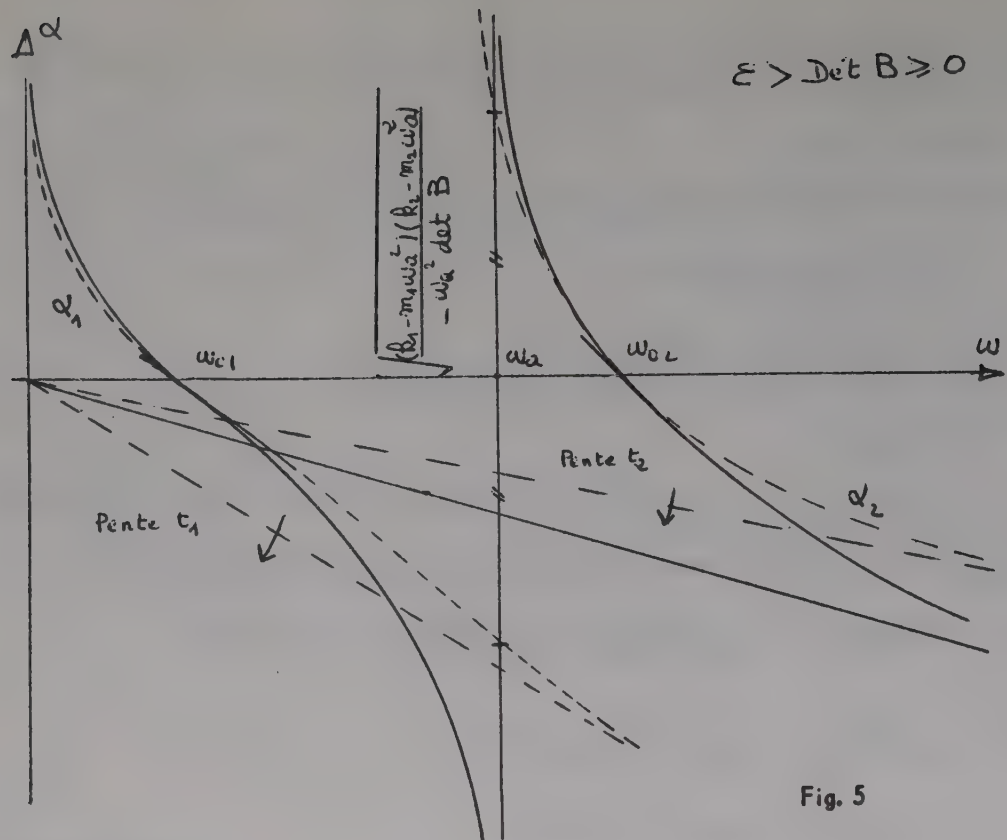


Fig. 5

2 2 - Systèmes d'ordre n -

221 - Démonstration de la propriété fondamentale

Théorème : En général, la pente des courbes $\alpha(\omega)$ au voisinage des ω_{0i} est indépendante des coefficients non diagonaux de B .

Démonstration : Partons des équations (1') et (2') et plaçons nous au voisinage de ω_i , les matrices étant toujours écrites, pour simplifier, dans la base propre.

$$[\alpha(K - \omega^2 M) + \omega B] X_\alpha = [F] \quad (1')$$

$$[K - \omega^2 M - \alpha \omega B] X_\alpha = [0] \quad (2')$$

$$\text{avec} \quad B \omega_i X_\alpha^* = F^* \quad (1'')$$

$$\text{pour } \alpha = 0 \quad [K - \omega_i^2 M] X_\alpha^* = 0 \quad (2'')$$

$$\Rightarrow X_\alpha^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F^* = \omega_i \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$$

Posons :

$$\omega = \omega_i + d\omega$$

$$X = X_\alpha^* + dX_\alpha^*$$

$$F = F^* + dF$$

$$\alpha = 0 + \alpha \quad (\alpha \text{ petit})$$

d'où : $[\alpha(K - \omega_i^2 M - 2\omega_i d\omega M) + \omega_i B + d\omega B] [X_\alpha^* + dX_\alpha^*] = [F^* + dF]$

$$[K - \omega_i^2 M - 2\omega_i d\omega M - \alpha(\omega_i + d\omega) B] [X_\alpha^* + dX_\alpha^*] = 0$$

La dernière matrice $n \times n$ doit être singulière, d'où au 1er ordre près :

$$\left[\begin{array}{cccc} \gamma_1^2 - m_1 \omega_1^2 - 2\omega_1 d\omega m_1 - \alpha \omega_1 b_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ j^{\text{ème}} \text{ ligne} \left\{ \begin{array}{cccc} -\alpha \omega_i b_{1i} & \dots & \gamma_i^2 - m_i \omega_i^2 - 2\omega_i d\omega m_i - \alpha \omega_i b_{ii} & \dots \end{array} \right. & & & \\ \vdots & & & \\ j^{\text{ème}} \text{ ligne} \left\{ \begin{array}{cccc} -\alpha \omega_i b_{1i} & \dots & \boxed{0 - 2\omega_i d\omega m_i - \alpha \omega_i b_{ii}} & \dots \end{array} \right. & & & \\ & & & -\alpha \omega_i b_{i+1,i} \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \end{array} \right] = 0$$

j^{ème} colonne

Nous développons par rapport à la colonne i et négligeons ensuite tous les termes faisant apparaître α^n ($n > 1$)

$$(-2\omega_i d\omega m_i - \alpha \omega_i b_{ii}) (\text{Polynôme en } \alpha) + \alpha^2 \omega_i b_{i+1,i} (\text{Polynôme en } \alpha) + \alpha^2 \dots + \dots = 0$$

$$(-2\omega_i d\omega m_i - \alpha \omega_i b_{ii}) \left\{ \prod_{\substack{j=1, 2, \dots, n \\ j \neq i}} (k_j - m_j \omega_j^2) + \dots \right\} = 0$$

$$\boxed{\alpha = - \frac{2 m_i d\omega}{b_{ii}}} \quad [R]$$

Conséquences :

Les relations matricielles précédentes s'écrivent en tenant compte de (1') et (2')

$$[\omega_i B d X_{\alpha}^* + d \omega B X_{\alpha}^*] = [d F]$$

$$[K - \omega_i^2 M] d X_{\alpha}^* - [2 \omega_i d \omega M] [X_{\alpha}^*] - \alpha \omega_i [B] [X_{\alpha}^*] = [0]$$

Tenant compte de [R] et de (1'')

$$\begin{cases} \omega_i B d X_{\alpha}^* + \frac{d \omega}{\omega_i} F = d F & [R_1] \\ [K - \omega_i^2 M] d X_{\alpha}^* - 2 \omega_i d \omega M X_{\alpha}^* + \frac{2 m_i}{b_{ii}} d \omega F = 0 & [R_2] \end{cases}$$

Etude de [R₂]

+++++

*i*ème ligne

$$0 - 2 \omega_i d \omega m_i X_{\alpha i}^* = - \frac{2 m_i}{b_{ii}} d \omega F_i^* \Leftrightarrow \begin{cases} F_i = \omega_i b_{ii} X_{\alpha i}^* = \omega_i b_{ii} \cdot 1 \text{ en normant } [X_{\alpha}] \text{ par } X_{\alpha i} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Or } (1') \Rightarrow F_i = \omega_i \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{\alpha j}^* \Rightarrow \sum_{j \neq i} b_{ij} X_{\alpha j}^* = 0$$

Cette relation est vérifiée si $\begin{cases} b_{ij} = 0 \text{ (évident)} \\ i \neq j \end{cases}$ et de toute façon car nous avons vu que l'équation (2'') implique $X_i = 0$, ce que nous avons d'ailleurs utilisé pour écrire la *i*ème ligne.

*i*ème ligne

$$(k_i - m_i \omega_i^2) d X_{\alpha i}^* - 2 \omega_i d \omega m_i X_{\alpha i}^* = - \frac{2 m_i}{b_{ii}} d \omega F_i^* \text{ avec } F_i^* = b_{ii} \omega_i$$

$$\left((k_i - m_i \omega_i^2) d X_{\alpha i}^* - 2 \omega_i d \omega m_i X_{\alpha i}^* \right) = - \frac{2 m_i}{b_{ii}} b_{ii} \omega_i d \omega \cdot 1$$

Etude de [R₁]

+++++

*i*ème ligne

$$\omega_i b_{ii} d X_{\alpha i}^* + \frac{d \omega}{\omega_i} \omega_i b_{ii} X_{\alpha i}^* = d F_i \text{ (avec } X_{\alpha i} = 1 \text{)}$$

$$d F_i = \omega_i b_{ii} d X_{\alpha i}^* + b_{ii} d \omega \quad \text{différentielle de l'expression obtenue précédemment.}$$

Si en normant $d X_{\alpha}$ nous choisissons $d X_{\alpha i}^* = 0$

$$\boxed{d F_i = d \omega b_{ii} \cdot 1}$$

$j^{\text{ème}} \text{ ligne}$

$$\omega_i \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} b_{jk} dX_{\alpha k}^* + \frac{d\omega}{\omega_i} b_{ji} \omega_i \cdot 1 = dF_j$$

nous avons calculé $d(X_{\alpha k}^*)$

$$dF_j = (b_{ji} \cdot 1 - \omega_i^2 \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} \frac{2m_k}{b_{ii}} \frac{b_{ki} b_{jk}}{k_k - m_k} \frac{1}{\omega_i^2}) d\omega$$

$$\boxed{dF_j = (b_{ji} \cdot 1 - \frac{2k_i}{b_{ii}} \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} \frac{b_{ki} b_{jk}}{k_k - m_k} \frac{1}{\omega_i^2}) d\omega}$$

Les termes non diagonaux de la matrice B ont donc une influence du premier ordre sur les colonnes $[X]$ et $[F]$ qui ne sont donc pas stationnaires au voisinage de ω_i au moins le long des courbes $\alpha(\omega)$.

Afin de préciser l'allure des courbes $\alpha(\omega)$ nous allons expliciter l'équation (E) et montrer que leur aspect peut renseigner sur les coefficients b_{ij} . L'étude sera faite dans le plan (α, ω) et dans le plan $(\omega^2, \alpha\omega)$ où elles présentent une forme plus simple.

2 2 2 Etude de l'équation en α (Le détail des calculs est donné en annexe)

Nous avons trouvé que le long des courbes $\alpha(\omega)$, nous avons :

$$\det. |(K - M\omega^2) - \alpha \omega B| = 0$$

ce qui fournit une équation caractéristique $E(\alpha, \omega) = 0$. Nous l'avons déterminée par récurrence.

$$E_n = \sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha^p \omega^p \sum_{\substack{i,j,k,l \\ i \neq j \neq k \neq l}} b_{ij}^{i,j,k,l} \prod_{m=1,2,3,\dots} (k_m - m_m \omega^2)$$

Les $n-p$ indices différents $i, j, \dots, l$ étant pris dans l'ensemble $I = \{1, 2, \dots, n\}$ nous avons donc C_n^p termes.

En posant $b_{ij}^{i,j,k,l,\dots} = \det B$: déterminant obtenu à partir de B en supprimant les lignes et les colonnes d'indice $i, j, \dots, k, l$

Soit sous forme plus explicite

$$\boxed{E_n = \prod_{i \in I} (k_i - m_i \omega^2) - \alpha \omega \sum_{ij \in I} b^{ij} (k_i - m_i \omega^2)(k_j - m_j \omega^2) + \dots + (-1)^n \alpha^n \omega^n \sum_{\Phi} b^{\Phi} \prod_{i=0}^n (k_i - m_i \omega^2)}$$

$\det K - M\omega^2 \qquad \qquad \qquad \det B$

Les calculs étant assez longs, nous ne donnons ici que le principe : le terme de plus haut degré provient de la diagonale principale; on développe le déterminant en commençant par l'élément nn : E_{nn} . Il faut remarquer que ce terme apporte sa contribution à tous les coefficients de l'équation E_n , il ne reste qu'à trouver l'expression générale du terme en α^p à partir de la contribution de E_{nn} .

Résultats de l'étude en fonction des variables (α, ω)

Nous avons démontré que

$$\left[\frac{d\alpha}{d\omega} \right]_{\substack{\omega=\omega_i \\ \alpha=0}} = -\frac{2m_i}{b_{ii}} \quad \text{si } b_{ii} \neq 0$$

$$\left[\frac{d^2\alpha}{d\omega^2} \right]_{\substack{\omega=\omega_i \\ \alpha=0}} = \frac{2m_i}{\omega_i b_{ii}} + \sum_{l \neq i} \frac{8\omega_i^2 m_i^2}{b_{ii}^2 (k_l - m_l \omega_i^2)} \begin{vmatrix} 0 & b_{il} \\ b_{li} & 0 \end{vmatrix}$$

Au terme déjà trouvé représentant la courbure de l'hyperbole, s'ajoute un second dépendant des b_{il} .

En général, le réseau $E(\alpha, \omega)$ présente n asymptotes passant par 0 et n asymptotes $\omega = 0$ confondues.

Nous ne donnons pas ici la démonstration car il nous a paru plus intéressant d'étudier les courbes implicites $\alpha(\omega)$ en faisant un changement de variable.

Nous remarquons que les dérivées α' et α'' tendent vers l'infini si b_{ii} tend vers zéro, ce que nous avons remarqué dans le cas de $n=2$ pour un couplage gyroscopique.

Résultats de l'étude en fonction des variables (u, v)

Considérons le changement de variables

$$\begin{aligned} u &= \omega^2 \\ v &= \alpha(\omega) \end{aligned}$$

Il ne fait pas intervenir les dérivées, donc conserve l'ordre des points de contact des courbes ; son avantage est de transformer les hyperboles en droites d'équation :

$$v = \frac{k_i - m_i u}{b_{ii}}, \quad \text{de pente } -\frac{m_i}{b_{ii}} \quad (\text{fig. 6})$$

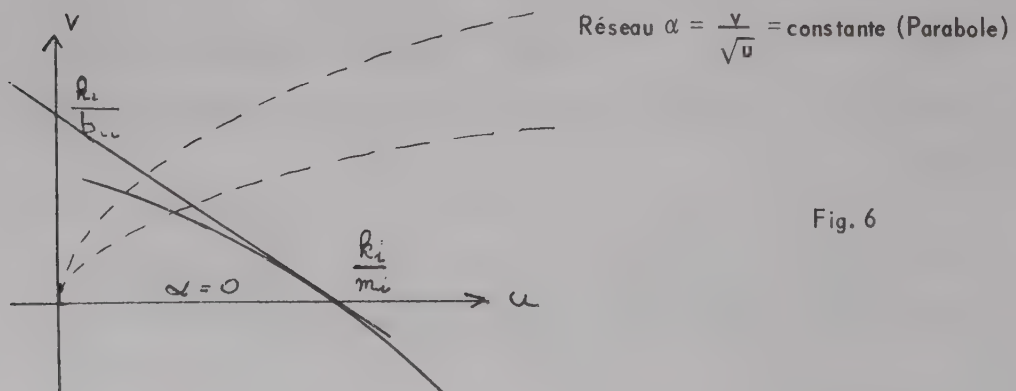


Fig. 6

$$E(u, v) \equiv \sum_0^n (-1)^p v^p \sum b^i \dots \prod (k_i - m_i u)$$

Cette équation est de degré n alors que $E(\alpha, \omega)$ est de degré deux n .

Nous trouvons finalement :

$$v'(\omega_i^2, 0) = - \frac{m_i}{b_{ii}}$$

et

$$v''(\omega_i^2, 0) = - \frac{2 m_i^3}{b_{ii}^3} \sum_{l \neq i} \frac{b_{il} b_{li}}{(\omega_l^2 - \omega_i^2) m_l}$$

Le réseau ne comporte plus d'asymptotes verticales mais en général n asymptotes ne passant pas par l'origine.

Si $b_{ii} = 0$, en ω_i la tangente est verticale.

CONCLUSION

Le tracé expérimental des courbes $E(u, v) = 0$ présente de nombreux avantages : Supposons que nous ayons tracé la branche passant par ω_i :

- L'intersection avec l'axe des u donne ω_i

- La pente pour $\omega = \omega_i$ donne $\frac{m_i}{b_{ii}}$

- Si la courbure est très faible, nous avons un renseignement global sur la ligne i et la colonne i de la matrice B (d'après l'expression de $v''(\omega_i^2; 0)$ où, seuls, ces termes interviennent (fig. 7)

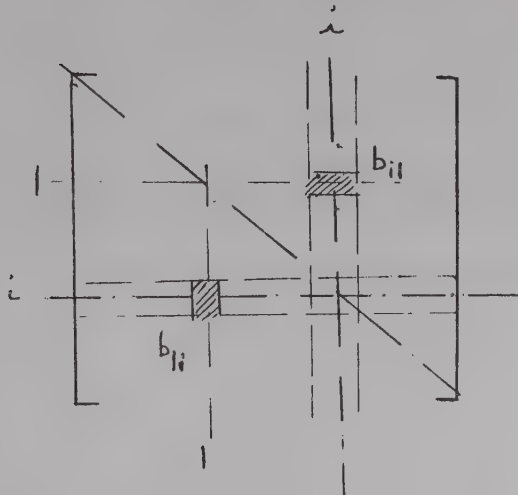


Fig. 7

Contribution de B au rayon de courbure en ω_i

REMARQUE - Nous avons supposé $b_{ii} \neq 0$ et B régulière; si ces conditions ne sont pas réalisées, le réseau peut présenter des tangentes verticales et des asymptotes verticales, comme nous l'avons montré sur des cas particuliers.

Pour des structures vibrantes, telles que avions, missiles, on admet souvent que $b_{ii} \gg b_{ij}$; si, de plus, $b_{ii} > 0$, alors $\det. B \neq 0$ car, d'après le critère d'HADAMARD, $\sum_{j=1,2}^n b_{ij} < b_{ii}$ est une condition suffisante de régularité de B . La présence d'asymptotes verticale paraît d'ailleurs beaucoup moins gênante que celle de tangentes verticales pour ω_i .

Chapitre II

Transposition des résultats dans la base de mesure

Nous savons qu'une équation caractéristique aux valeurs propres est indépendante de la base; nous allons rappeler rapidement ce résultat.

Dans une base quelconque, nous avons :

$$MX'' + BX' + KX = E$$

Changeons de notation et appelons $q_1, q_2 \dots q_n$ les paramètres fixant la position du système dans la base propre, le mouvement étant régi par l'équation :

$$\mu q'' + \beta q' + \gamma q = \Sigma$$

Soit la matrice modale (telle que $\tilde{Z}$ soit vecteur propre de la matrice $[K - \lambda M]$ singulière pour les valeurs propres ω_i^2)

$$X = \tilde{Z}q \quad X' = \tilde{Z}q' \quad X'' = \tilde{Z}q''$$

Nous avons $\tilde{Z} M \tilde{Z} q'' + \tilde{Z} B \tilde{Z} q' + \tilde{Z} M \tilde{Z} q = \tilde{Z} E$

$$\mu q'' + \beta q' + \gamma q = \tilde{Z} E$$

$$\text{Si } E = F \cos \omega t \quad \Sigma = \tilde{Z} F \cos \omega t = \gamma \cos \omega t$$

$$\text{et} \quad [q] = [q \alpha] [\alpha \cos \omega t + \sin \omega t] \quad X = \tilde{Z} q \alpha [\alpha \cos \omega t + \sin \omega t]$$

α est donc un invariant et en traçant les courbes $\alpha(\omega)$ dans une base quelconque (la base de l'expérimentateur) on obtient les courbes que nous avons étudiées (Fig. 8)

Nous allons préciser maintenant les résultats expérimentaux nécessaires pour utiliser la méthode .

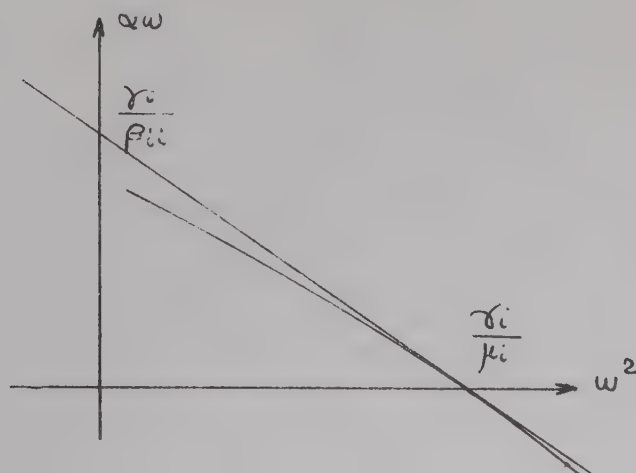


Fig. 8

Pour $\omega = \omega_i$ nous relevons le vecteur déplacement $\tilde{z}_i$, le vecteur excitation F_i et nous faisons choix d'une norme pour $\tilde{z}_i$ en posant

$$\|\tilde{z}_i\| = 1 \Leftrightarrow \tilde{z}_{ii} = 1$$

D'où les deux matrices

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{z}_{21} & \dots \\ \tilde{z}_{12} & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \mathcal{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & \dots \\ F_{12} & F_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Pour $\tilde{z}_{ii} = 1$

Nous connaissons $\frac{\gamma_i}{\beta_{ii}}$ $\frac{\gamma_i}{\mu_i}$ donc $\gamma_i, \mu_i, \beta_{ii}$ à une constante multiplicative près.

Nous avons n inconnues λ_i

$$\text{Mais } \begin{cases} \omega_i B \tilde{z}_i = \mathcal{F}_i \\ \beta = \tilde{Z} B \tilde{Z} \end{cases} \Rightarrow \beta = \tilde{Z} \mathcal{F} \Omega^{-1}$$

où $\mathcal{F} \Omega^{-1}$ est la matrice des forces dont chaque colonne est divisée par la pulsation ω_i correspondante, Ω étant la matrice spectrale

$$\Omega = \text{diag. } \{ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \}$$

Les λ_i sont donc connus : $\lambda_i = \frac{\lambda_i \beta_{ii}}{\beta_{ii}}$; donc les γ_i et μ_i le sont.

Les matrices β, μ, γ sont connues, les fréquences propres le sont.

Les matrices M, B et K le seraient aussi ; ainsi $M = \tilde{Z}^{-1} \mu \tilde{Z}^{-1}$

$$\begin{matrix} \div \\ \div & \div \\ \div \end{matrix}$$

CONCLUSION DE L'ETUDE THEORIQUE

Nous avons montré théoriquement qu'on peut déterminer expérimentalement les matrices M , B , K , sans avoir recours aux méthodes des surcharges ou des fréquences déplacées, à condition de connaître certaines courbes $E(u,v)$ au voisinage des fréquences propres.

L'existence de ces courbes est démontrée dans le cas où le système est effectivement à n degrés de liberté. Pour un système continu, la théorie est d'autant plus valable que n est choisi élevé.

La méthode ne fait aucune hypothèse sur la symétrie. Elle suppose que les ω_i sont positifs réels (stabilité).

Dans les pages qui vont suivre, nous appliquerons cette méthode à des systèmes à deux, quatre et six degrés de liberté ou considérés comme tels.

÷

÷ ÷

÷

ANNEXE à la 1^{ère} PARTIEETUDE de l'EQUATION $E(\alpha, \omega) = 0$

RECHERCHE DU TERME GENERAL

Nous allons considérer successivement le cas $n=1$, $n=2$, $n=3$

$$E_1(\alpha, \omega) \equiv -\alpha b_{11} \omega + k_1 - m_1 \omega^2 = 0$$

$$E_2(\alpha, \omega) \equiv (-1)^2 \det_{(2)} B \omega^2 - \alpha \omega \sum_{i=1,2} \beta_{ii} (k_i - m_i \omega^2) + \det_{(2)} (K - \omega^2 M)$$

où β_{ii} est le mineur algébrique de b_{ii} , $\det_{(2)}$ représentant un déterminant d'ordre 2.

$$E_3(\alpha, \omega) \equiv \begin{vmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 - \alpha b_{11} \omega & -\alpha b_{21} \omega & -\alpha b_{31} \omega \\ -\alpha b_{12} \omega & k_2 - m_2 \omega^2 - \alpha b_{22} \omega & -\alpha b_{32} \omega \\ -\alpha b_{13} \omega & -\alpha b_{23} \omega & k_3 - m_3 \omega^2 - \alpha b_{33} \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & -\alpha b_{31} \omega \\ & E_2(\alpha, \omega) & -\alpha b_{32} \omega \\ -\alpha b_{13} \omega & -\alpha b_{23} \omega & k_3 - m_3 \omega^2 - \alpha b_{33} \omega \end{vmatrix}$$

$$E_3(\alpha, \omega) = E_2(\alpha, \omega) (k_3 - m_3 \omega^2 - \alpha b_{33} \omega) + \alpha b_{23} \omega \begin{vmatrix} & -\alpha b_{31} \omega \\ -\alpha b_{13} \omega & k_3 - m_3 \omega^2 - \alpha b_{33} \omega \end{vmatrix} + \alpha b_{13} \omega \begin{vmatrix} & -\alpha b_{32} \omega \\ -\alpha b_{23} \omega & k_3 - m_3 \omega^2 - \alpha b_{33} \omega \end{vmatrix}$$

Calcul du premier terme

$$(k_3 - m_3 \omega^2 - \alpha b_{33} \omega) E_2 = \alpha^3 \omega^3 (-1)^3 b_{33} \det_{(2)} B + \alpha^2 \omega^2 \left\{ \sum_{i=1,2} \beta_{ii} (k_i - m_i \omega^2) b_{33} + (k_3 - m_3 \omega^2) \det_{(2)} B \right\} \\ - \alpha \omega \left\{ (k_3 - m_3 \omega^2) \sum_{i=1,2} \beta_{ii} (k_i - m_i \omega^2) + \det_{(2)} (K - \omega^2 M) b_{33} \right\} \\ + \det_{(2)} (K - M \omega^2) (k_3 - m_3 \omega^2)$$

$$(k_3 - m_3 \omega^2 - \alpha b_{33} \omega) E_2 = \alpha^3 \omega^3 (-1)^3 b_{33} \det_{(2)} B + \alpha^2 \omega^2 \left\{ \sum_{i=1,2} \beta_{ii} (k_i - m_i \omega^2) b_{33} + (k_3 - m_3 \omega^2) \det_{(2)} B \right\}$$

$$- \alpha \omega \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ k, i, j = 1, 2, 3}} b_{ii} (k_i - m_i \omega^2) (k_k - m_k \omega^2) + \det_{(3)} (K - M \omega^2)$$

Calcul du deuxième terme

$$\alpha b_{23} \omega \begin{vmatrix} k_1 - m_1 \omega^2 - \alpha b_{11} \omega & -\alpha b_{31} \omega \\ -\alpha b_{12} \omega & -\alpha b_{32} \omega \end{vmatrix} = \alpha b_{23} \omega \alpha^2 \omega^2 (b_{11} b_{32} - b_{31} b_{12}) - \alpha \omega b_{32} (k_1 - m_1 \omega^2) =$$

$$= \alpha^3 \omega^3 b_{23} (b_{11} b_{32} - b_{31} b_{12}) - \alpha^2 \omega^2 b_{23} b_{32} (k_1 - m_1 \omega^2)$$

Calcul du troisième terme

$$\alpha b_{13} \omega \begin{vmatrix} \alpha b_{31} \omega & -\alpha b_{21} \omega \\ -\alpha b_{32} \omega & k_2 - m_2 \omega^2 - \alpha b_{22} \omega \end{vmatrix} = \alpha b_{13} \omega \alpha^2 \omega^2 (b_{31} b_{22} - b_{21} b_{32}) - \alpha \omega b_{31} (k_2 - m_2 \omega^2) =$$

$$= \alpha^3 \omega^3 b_{13} (b_{31} b_{22} - b_{21} b_{32}) - \alpha^2 \omega^2 b_{31} (k_2 - m_2 \omega^2)$$

$$E_3(\alpha, \omega) \equiv \alpha^3 \omega^3 (-1)^3 \det B + (1)^2 \alpha^2 \omega^2 \sum_{i=1,2,3} \beta_{ii} (k_i - m_i \omega^2) - \alpha \omega \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ i, j, k = 1,2,3}} b_{ij} (k_i - m_i \omega^2) (k_k - m_k \omega^2) + \det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (3)$$

Comparons E_2 et E_3

Les deux premiers termes ont même forme dans les deux équations.

Le dernier terme est toujours $\det |K - \omega^2 M|$

Nous voyons que les deux premiers termes et le dernier s'obtiennent par récurrence; en faisant quelques transformations nous allons montrer, qu'en fait, tous les termes ont la même forme.

$$E_3(\alpha, \omega) = \alpha^3 \omega^3 (-1)^3 \sum_0 b^0 \prod_0 (k_i - m_i \omega^2) + (-1)^2 \alpha^2 \omega^2 \sum_i b_i^1 \prod_i (k_i - m_i \omega^2) + (-1)^1 \alpha \omega \sum_{\substack{i \neq k \\ i, j, k = 1,2,3}} b^{i,k} \prod_{k \times i} (k_i - m_i \omega^2) +$$

$$+ (-1)^0 \sum_{i \neq k \neq l} b^{i,k,l} \prod_{i \times k \times l} (k_i - m_i \omega^2)$$

Avec les notations suivantes :

$$\prod_0 (k_i - m_i \omega^2) = \text{produit des termes } k_i - m_i \omega^2 \text{ d'indice nul} = 1 \text{ par définition}$$

$$\prod_i (k_i - m_i \omega^2) = \text{« } \text{égal à } i = (k_i - m_i \omega^2)$$

$$\prod_{i \times k} (k_i - m_i \omega^2) = \text{« } \text{« } i \text{ et } k = (k_i - m_i \omega^2) (k_k - m_k \omega^2)$$

etc

b^0 déterminant obtenu en supprimant dans B les termes d'indice 0 = $\det . B$

b^i « « la ligne et la colonne contenant b_{ii}

$$\text{Ex : } b^1 = \beta_{11} = b_{33} b_{22} - b_{23} b_{32} \quad (\text{pour l'ordre 3})$$

b^{ik} déterminant obtenu en supprimant dans B les lignes et les colonnes contenant b_{ii} et b_{kk}

$$\text{Ex : } b^{23} = b_{11} \quad (\text{pour l'ordre 3}) \quad \text{etc}$$

$\sum_o b_o^o \prod_o (i)$ somme des termes obtenus en donnant à l'indice supérieur i de b les valeurs 1, 2, 3 = 1 par définition .

$\sum_i b_i^i \prod_i (i)$ somme des termes obtenus en donnant à l'indice supérieur i de b les valeurs 1, 2, 3

$\sum_{i \neq k} b_{ik}^{ik} \prod_{i \times k} (i)$ somme des termes obtenus en donnant aux indices supérieurs i et k de b les valeurs 1, 2, 3 avec $i \neq k$.

Ces définitions peuvent être étendues pour n supérieur à trois en prenant les indices dans l'ensemble $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

La règle de formation des différents coefficients en α est alors évidente .

$$E_2(\alpha, \omega) = \alpha^2 \omega^2 (-1)^2 \sum_o b_o^o \prod_o (i) - \alpha \omega \sum_i b_i^i \prod_i (i) + \sum_{i \neq k} b_{ik}^{ik} \prod_{i \times k} (i) = 0 \quad i, k \in \{1, 2\}$$

$$E_3(\alpha, \omega) = (-1)^3 \alpha^3 \omega^3 \sum_o b_o^o \prod_o (i) + (-1)^2 \alpha^2 \omega^2 \sum_i b_i^i \prod_i (i) + (-1)^1 \alpha \omega \sum_{i \neq k} b_{ik}^{ik} \prod_{i \times k} (i) + (-1)^0 \sum_{i \neq k \neq l} b_{ikl}^{ikl} \prod_{i \times k \times l} (i) \quad i, k, l \in \{1, 2, 3\}$$

$$E_n(\alpha, \omega) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha^p \omega^p \sum_{i \neq k \neq l \dots \neq m} b_{ikl\dots m}^{ikl\dots m} \prod_{i \times k \times l \times \dots \times m} (i) (k_i - m_i \omega^2)$$

les $n-p$ indices différents étant pris dans l'ensemble $I = \{1, 2, \dots, n\}$

÷

÷ ÷

÷

EQUATION $E(\alpha, \omega) = 0$

ETUDE EN FONCTION DES VARIABLES (α, ω)

- ETUDE au VOISINAGE de ω_i

Nous avons une équation implicite de α et ω .

$$E_n = \sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha^p \omega^p \sum b^{ij \dots l} \prod_{i,j,k \dots l} (k_m - m_n \omega^2)$$

a) Pente des courbes en $\omega_{i,0}$

$$\frac{\partial E_n}{\partial \alpha} = \sum_{p=0}^n (-1)^p p \alpha^{p-1} \omega^p \sum b \Pi$$

$$\left. \frac{\partial E_n}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} \quad \text{ne fait intervenir que le terme en } \alpha \text{ où } p=1$$

$$\left. \frac{\partial E_n}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} = \left. -\omega \sum b^{ij} \prod_{n-p \text{ indices } \neq i} (m) \right|_{\omega = \omega_i}$$

où tous les termes contenant $(k_i - m_i \omega^2)$ sont nuls.

$$\left. \frac{\partial E_n}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} = -\omega_i b_{ii} \prod_{m=1,2 \dots i-1, i+1, n} (k_m - m_m \omega_i^2)$$

$$\left. \frac{\partial E_n}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} = \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \det(K - \omega^2 M) \right|_{\omega = \omega_i}$$

$$\left. \frac{\partial E_n}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} = \left. (k_i - m_i \omega^2) \frac{\partial}{\partial \omega} \prod_{m \neq i} (m) - 2 m_i \omega \prod_{m \neq i} (m) \right|_{\omega = \omega_i} = -2 m_i \omega_i \prod_{m \neq i} (m)$$

$$\left| \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} \right|_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} = -2m_i \frac{\prod_{m \neq i} (m)}{b_{ii} \prod_{m \neq i} (m)} = -\frac{2m_i}{b_{ii}}$$

Nous retrouvons que les pentes des courbes sont indépendantes des termes b_{ii} de la matrice B et finies sauf si la diagonale principale contient des zéros.

b) Etude de la courbure au voisinage de ω_i

$$E[\alpha(\omega), \omega] = 0$$

$$E\alpha\alpha' + E_{\omega\omega} = 0$$

$$\alpha' = -\frac{E_{\omega\alpha}}{E_{\alpha\alpha}} \Rightarrow \alpha'' = -\frac{(E_{\omega\alpha\alpha'} + E_{\omega\omega}) E_{\alpha\alpha} - E_{\omega\omega} [E_{\alpha\alpha\alpha'} + E_{\alpha\omega\omega}]}{E_{\alpha\alpha}^2}$$

Nous avons trouvé :

$$\{E_{\alpha\alpha}\}_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} = -\omega_i b_{ii} \prod_{m \neq i} (m)$$

$$\{E_{\omega\omega}\}_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} = -2m_i \omega_i \prod_{m \neq i} (m) \Rightarrow \alpha''_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} = \left| -\frac{[E_{\omega\alpha\alpha'} + E_{\omega\omega}] - \frac{2m_i}{b_{ii}} [E_{\alpha\alpha\alpha'} + E_{\alpha\omega\omega}]}{-\omega_i b_{ii} \prod_{m \neq i} (k_m - m_m \omega^2)} \right|_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}}$$

Calcul de $E_{\alpha\alpha}$

$$E_{\alpha} = \sum_{p=0}^n p(-1)^p \alpha^{p-1} \omega^p \sum_{n=p} b \prod$$

$$E_{\alpha\alpha} = \sum_{p=0}^n p(p-1)(-1)^p \alpha^{p-2} \omega^p \sum_{n=p} b \prod$$

Pour $\omega = \omega_i$, $\alpha = 0$, seul le terme correspondant à $p=2$ apporte sa contribution.

$$\text{Contribution de } E_{\alpha\alpha} \Big|_{\substack{\omega = \omega_i \\ \alpha = 0}} = 2\omega_i^2 \left\{ \sum_{n=2} b_{ii} \prod \right\}_{\omega = \omega_i}$$

Calcul de $E_{\alpha\omega}$

$$E(\alpha, \omega) = \sum_{p=0}^n p(-1)^p \alpha^{p-1} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^p \sum_{n=p} b^{ij} \prod(m))$$

Pour $\omega = \omega_i$, $\alpha = 0$, seul le terme correspondant à $p=1$ apporte sa contribution.

$$\text{Contribution de } E_{\alpha, \omega}(\alpha, \omega) = -\left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \sum_{n=1} b^{ij} \prod) \right\}_{\omega = \omega_i}$$

Calcul de $E_{\omega, \omega}$

Le terme apportant sa contribution est $\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left(\sum_n \prod \right)_{\omega = \omega_i}$

d'où :

$$\alpha'' \omega_i b_{ii} \prod_{m \neq i} (k_m - m_m \omega_i^2) = \left\{ \left[\frac{2m_i}{b_{ii}} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \sum_{n=1} b_{ii}^{ii} \Pi) + \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} (\sum_n b_{ii} \Pi) \right] - \frac{2m_i}{b_{ii}} \left[\frac{4 \omega^2 m_i}{b_{ii}} \sum_{n=2} - \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \sum_{n=1} \Pi) \right] \right\} \omega = \omega_i$$

$$\alpha'' \omega_i b_{ii} \prod_{m \neq i} (k_m - m_m \omega_i^2) = \left\{ \frac{4m_i}{b_{ii}} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \sum_{n=1} b_{ii}^{ii} \Pi) + \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \sum_n + 8 \left(\frac{\omega m_i}{b_{ii}} \right)^2 \sum_{n=2} \right\} \omega = \omega_i$$

Calcul de chacun des termes dérivés pour $\omega = \omega_i$ et de $\sum_{n=2}$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \omega \sum_{n=1} = \sum_{n=1} + \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \sum_{n=1} \quad \omega = \omega_i = b_{ii} \prod_{m \neq i} (m) + \omega_i b_{ii} \frac{\partial}{\partial \omega} \prod_{m \neq i} (m) - \sum_{l \neq i} b_{ll} 2m_i \omega_i \prod_{m \neq i} (m) + 0$$

$$= \left\{ b_{ii} \prod_{m \neq i} (m) - 2 \omega_i^2 \sum_{l \neq i} (m_l b_{ii} + m_i b_{ll}) \prod_{m \neq i} (m) \right\} \omega = \omega_i$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \sum_n = (k_i - m_i \omega_i^2) \frac{\partial}{\partial \omega} \prod_{m \neq i} (m) - 2 m_i \omega \prod_{m=i}$$

$$= 0 - 4 m_i \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \prod_{m \neq i} (m) - 2 m_i \prod_{m \neq i} (m) = \left\{ \sum_{l \neq i} 8 m_i m_l \omega_i^2 \prod_{m \neq i} (m) - 2 m_i \prod_{m \neq i} (m) \right\} \omega = \omega_i$$

$$\sum_{n=2} = \left\{ \sum_{m \neq i} b_{ii} b_{ll} \prod_{m \neq i} (m) - \sum_{m \neq i} b_{il} b_{li} \prod_{m \neq i} (m) + 0 \right\} \omega = \omega_i$$

Finalement :

$$\alpha'' \omega_i b_{ii} \prod_{m \neq i} (m) = 4 m_i \prod_{m \neq i} (m) - \frac{8 m_i}{b_{ii}} \omega_i^2 \sum_{l \neq i} (m_l b_{ii} + m_i b_{ll}) \prod_{m \neq i} (m) + \sum_{l \neq i} 8 m_i m_l \omega_i^2 \prod_{m \neq i} (m) - 2 m_i \prod_{m \neq i} (m) + 8 m_i \omega_i^2 \sum_{l \neq i} b_{ii} b_{ll} \prod_{m \neq i} (m) - 8 \left(\frac{m_i \omega_i}{b_{ii}} \right)^2 \sum_{l \neq i} b_{il} b_{li} \prod_{m \neq i} (m)$$

$$(\alpha'' \omega_i b_{ii} - 2 m_i) \prod_{m \neq i} (m) = \sum_{l \neq i} 8 \omega_i^2 \left\{ \begin{array}{l} - \frac{m_i}{b_{ii}} (m_l b_{ii} + m_i b_{ll}) \\ + m_i m_l \\ + m_i^2 \left(\frac{b_{ll}}{b_{ii}^2} b_{ii} - \frac{b_{il} b_{li}}{b_{ii}^2} \right) \end{array} \right\} \prod_{m \neq i} (m)$$

$$\alpha'' \omega_i b_{ii} - 2 m_i = \sum_{l \neq i} \frac{8 \omega_i^2 m_i^2}{k_l - m_l \omega_i^2} \left\{ \begin{array}{l} b_{ll} \quad b_{li} \\ b_{il} \quad b_{ll} \end{array} \right\} - \left| \begin{array}{l} b_{ll} \quad 0 \\ 0 \quad b_{ll} \end{array} \right\} \frac{1}{b_{ii}^2}$$

$$\boxed{\alpha'' = \frac{2 m_i}{b_{ii} \omega_i} + \sum_{l \neq i} \frac{8 \omega_i^2 m_i^2}{b_{ii}^3 (k_l - m_l \omega_i^2)} \left| \begin{array}{l} 0 \quad b_{li} \\ b_{il} \quad 0 \end{array} \right|}$$

La courbure en $(\omega_i, 0)$ est alors :

$$C = \frac{\alpha''}{(1 + \alpha'^2)^{3/2}} = \frac{1}{R}$$

$$C = \frac{2 m_i}{\omega_i b_{ii}} + \sum \frac{8 \omega_i^2 m_i^2}{b_{ii}^3 (k - m_i \omega_i^2)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & b_{li} \\ b_{il} & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{4 m_i^2}{b_{ii}^2})^{3/2}}$$

- ETUDE AU VOISINAGE de l'INFINI

a) Directions asymptotiques .

Nous avons une courbe algébrique de degré $2n$.

$\varphi_{2n}(\omega, \alpha) = 0$ donne le faisceau des droites parallèles aux asymptotes

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(\omega, \alpha) &= \sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha^p \omega^p (-1)^p \omega^{2n-2p} \sum_{n-p} \prod_{n-p}^+ m_m \text{ avec } \prod^+ m_m = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k \\ &= \omega^n \sum_{p=0}^n \alpha^p \omega^{n-p} \sum_{n-p}^{ij} b^{ij} \prod m_m \end{aligned}$$

Dét. $B \neq 0$

$\omega^n = 0 \Rightarrow n$ directions asymptotiques verticales

$\sum_{p=0}^n \alpha^p \omega^{n-p} \sum_{n-p}^{ij} b^{ij} \prod m_i = 0$ donne l'équation aux pentes des directions asymptotiques
en faisant $\omega = 1$, $\alpha = t$

$$\varphi_n(1, t) = 0 \Leftrightarrow t^n \det B + t^{n-1} \sum_{n-p}^{ij} b^{ij} \prod m_i + \dots + \prod_{1 \times i \times \dots \times n} m_n = 0$$

n coefficients

En général, nous avons n directions asymptotiques t_i

Si $\det B = 0$

$\varphi_{2n}(\omega, \alpha) = 0$ devient

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \alpha^p \omega^p (-1)^p \omega^{2n-2p} \sum_{n-p}^{ij} b^{ij} \prod m_n &= 0 \\ \omega^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^p \omega^{n-(p+1)} \sum_{n-p}^{ij} b^{ij} \prod m_n &= 0 \end{aligned}$$

$\omega^{n+1} = 0 \Rightarrow n+1$ directions asymptotiques verticales .

L'équation aux pentes donne, en général, $n-1$ directions asymptotiques (résultat vérifié pour $n=2$)

b) Asymptotes -
Asymptotes verticales

Dét B $\neq 0$

Les abscisses de ces asymptotes annulent le terme en α^n de l'équation $E_n(\omega, \omega) = 0$
 l'axe des α est donc n fois asymptote verticale en général.

Dét B = 0 B de rang n-1

Les abscisses des asymptotes sont solution de l'équation coefficient de $\alpha^{n-1} = 0$
 l'axe des α est n-1 fois asymptote verticale.

Il existe une autre asymptote verticale (pour les ω positifs) solution positive de l'équation

$$\sum \beta_{ii} (k_i - m_i \omega^2) = 0 \quad \omega = + \frac{\sum \beta_{ii} k_i}{\sum \beta_{ii} m_i}$$

Le nombre d'asymptotes verticales d'abscisse non nulle dépend du rang de la matrice B

Asymptotes de pente finie

L'équation d'une telle asymptote de pente t_i est :

$$\alpha = t_i \omega - \frac{\varphi_{2n-1}}{\frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial \alpha}} (1, t_i)$$

$\varphi_{2n-1} = 0$ à cause de la parité des produits $k_i - m_i \omega^2$

$$\frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial \alpha} = \sum_p \omega^{n-p} \alpha^{p-1} \sum b_{ij} \prod m_i \neq 0$$

L'annulation serait en effet extraordinaire puisque tous les mineurs interviennent.

En général les asymptotes non verticales passent par l'origine.

Pente des courbes $\varphi(\omega)$ à l'origine.

Si $\omega \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$, en général $\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \text{tg } \varphi \sim \varphi \rightarrow 0$

L'équation $E(\omega, \frac{1}{\alpha})$ nous donnera l'équation du faisceau de droites tangentes aux courbes à l'origine si nous remplaçons α par φ et considérons le groupe homogène de plus haut degré.

$$E(\omega, \frac{1}{\alpha}) = \bar{\alpha}^n \sum_{p=0}^n (-1)^p \alpha^{n-p} \omega^p \sum_{n-p} b_{ij} \dots \prod (k_i - m_i \omega^2)$$

D'où l'équation du faisceau des n droites.

$$\psi_n(\omega, \varphi) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \varphi^{n-p} \omega^p \sum b_{ij} \prod k_i$$

Si B est diagonale

$$\psi_n(\omega, \varphi) = \prod_{i=1}^n (\varphi_i k_i - b_{ii} \omega) = \omega^n b_{11} b_{22} \dots b_{nn} + \dots + \prod_{i=1}^n \varphi_i k_i$$

Formule que nous retrouvons .

En conclusion, la contribution des b_{ij} sur la pente des courbes est complexe; des expériences faites en T.B. F. ne donneraient donc pas de résultats utilisables.

$$\begin{array}{c} \div \\ \div \div \\ \div \end{array}$$

ETUDE de l'EQUATION E_n en FONCTION des VARIABLES u et v

$$E_n(\alpha, \omega) \equiv \sum_0^n (-1)^p \alpha^p \omega^p \sum b^{ij\dots} \Pi(k_m - m_m \omega^2) = 0$$

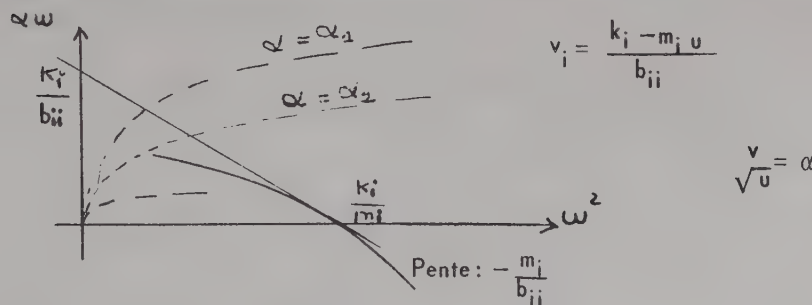
Nous rappelons que cette équation représente dans le plan (α, ω) un réseau de courbes à n branches et $2n$ asymptotes réelles en général tangent aux points ω_i à n hyperboles .

Faisons le changement de variable .

$$\begin{array}{l} u = \omega^2 \\ v = \alpha \omega \end{array} \quad \text{conservant l'ordre des points de contact}$$

$$E(u, v) = \sum_0^n (-1)^p v^p \sum b^{ij\dots} \Pi(k_i - m_i u) = 0 \quad (\text{degré } n)$$

Equation d'un faisceau de courbes algébriques à n branches tangent en ω_i au faisceau des n droites d'équations :



-ETUDE AU VOISINAGE de ω_i

$$u = \frac{k_i}{m_i} \quad v = 0$$

Nous aurons besoin des dérivées premières et secondes de $E(u, v)$

$$E_v = \sum_0^n (-1)^p p v^{p-1} \sum_{n-p} b^{ij\dots} \Pi(k_m - m_m u)$$

$$E_{vv} = \sum_0^n (-1)^p p(p-1) v^{p-2} \sum \dots$$

$$E_u = \sum_0^n (-1)^p v^p \sum b \frac{\partial}{\partial u} \prod_{n-p} (m)$$

$$E_{uu} = \sum_0^n (-1)^p v^p \sum b \frac{\partial^2}{\partial u^2} \prod_{n-p} (m)$$

$$E_{uv} = \sum_0^n (-1)^p v^{p-1} \sum b \frac{\partial}{\partial u} \prod_{n-p} (m)$$

Pente au voisinage de ω_i

Les courbes pour $u = \frac{k_i}{m_i}$ admettent bien la solution $v=0$

$$v' E_v + E_u = 0 \quad v' = - \frac{E_u}{E_v}$$

$$v'(\omega_i, 0) = - \left(\frac{E_u}{E_v} \right)_{\omega_i, 0}$$

Pour E_u intervient le terme en v^0 $p=1$

Pour E_v v^0 $p=0$

Contribution de E_v

$$-\sum b_{ii} \prod_{m \neq i} (k_m - m_m u)$$

$$v'(\omega_i, 0) = - \frac{m_i}{b_{ii}}$$

Contribution de E_u

$$(k_i - m_i u) \frac{\partial}{\partial u} \prod_{n-1} () - m_i \prod_{n-1} (k_m - m_m u)$$

Rayon de courbure au voisinage de ω_i

$$v' = - \frac{E_u}{E_v}; \quad v'' = - \frac{E_v [E_{uu} - v' E_{vu} - E_u (E_{uu} + v' E_{uv})]}{(E_v)^2}$$

$$v'' = - \frac{1}{E_v} (E_{uu} + 2v' E_{vu} + v'^2 E_{vv})$$

$$v''(\omega_i, 0) = \frac{1}{b_{ii} \prod_{\substack{n-1 \\ m \neq i}} (k_m - m_m u)} [E_{uv} - \frac{2m_i}{b_{ii}} E_{vu} + (\frac{m_i}{b_{ii}})^2 E_{vv}]_{\omega_i, 0}$$

Contribution de E_{vv}

$$p=2 \quad 2 \sum_{n=2}^{ij} b \prod_{n-2} (k_m - m_m u) = 2 \sum_i b_{ii} b_{ll} \prod_{\substack{m \neq i \\ m \neq l}} () - 2 \sum_i b_{il} b_{li} \prod_{\substack{m \neq i \\ m \neq l}} () + 0$$

Contribution de E_{vu}

$$p=1 \quad - \sum b^{ij} \dots \frac{\partial}{\partial u} \prod_{n-1} (k_m - m_m u) = - \sum_i b^{ij} (k_i - m_i u) \frac{\partial}{\partial u} \prod_{\substack{m \neq i \\ m \neq l}} () - m_i \prod_{\substack{m \neq i \\ m \neq l}} () + m_i \sum_l b_{ll} \prod_{\substack{m \neq i \\ m \neq l}} ()$$

$$= \sum_i (b_{ii} m_l + b_{ll} m_i) \prod_{\substack{m \neq i \\ m \neq l}} ()$$

Contribution de E_{uu}

$$p=0 \quad \sum \frac{\partial^2}{\partial u^2} \Pi ()$$

avec $\frac{\partial}{\partial u} \Pi_n = (k_i - m_i u) \frac{\partial}{\partial u} \Pi_{m \neq i} () - m_i \Pi_{m \neq i} (k_m - m_m u)$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \Pi_n = -2m_i \frac{\partial}{\partial u} \Pi_{m \neq i} () = 2m_i \sum_{\substack{l \\ m \neq l}} m_l \Pi_{m \neq i} ()$$

$$v''(\omega_{i,0}) = \frac{2}{b_{ii}} \Pi_{\substack{n-1 \\ m \neq i}} \sum_l (b_{il} b_{ll} - b_{li} b_{li}) \frac{m_l^2}{b_{ii}^2} - \frac{m_i}{b_{ii}} (b_{ii} m_l + b_{ll} m_i) + m_i m_l \Pi_{\substack{m \neq i \\ m \neq l}} ()$$

$$= \frac{2}{b_{ii}} \sum \frac{1}{k_l - m_l \frac{k_i}{m_i}} \left(\frac{b_{ll} m_l^2}{b_{ii}} - \frac{b_{il} b_{li}}{b_{ii}^2} m_l^2 - m_i m_l - m_i^2 \frac{b_{li}}{b_{ii}} + m_i m_l \right)$$

$$= -2 \frac{m_i^2}{b_{ii}^3} \sum_{l \neq i} \frac{b_{il} b_{li}}{k_l - m_l \frac{k_i}{m_i}}$$

$$v''(\frac{k_i}{m_i}, 0) = -2 \left(\frac{m_i}{b_{ii}} \right)^3 \sum_{l \neq i} \frac{b_{il} b_{li}}{m_l (\omega_l^2 - \omega_i^2)}$$

d'où la courbure :

$$\frac{1}{R_i} = C_i = -2 \frac{m_i^2}{b_{ii}^3} \sum_{l \neq i} \frac{b_{il} b_{li}}{k_l - m_l \frac{k_i}{m_i}} - \frac{1}{\left\{ 1 + \left(\frac{m_i}{b_{ii}} \right)^2 \right\}^{3/2}}$$

-ETUDE AU VOISINAGE DE L'INFINI

$$\varphi_n(u, v) = (-1)^n \{ v^n \det B + v^{n-1} \sum_{n-1} + \dots \}$$

$$\varphi_n(1, t) = 0 \rightarrow t^n \det B + t^{n-1} + \dots + \prod_n m_i = 0$$

Les n asymptotes verticales n'existent plus en général, les directions asymptotiques de pentes finies sont en nombres n .

S'il y a des asymptotes elles ne passent pas par l'origine et ont comme équation :

$$v = u t_i - \frac{\varphi_{n-1}(1, t_i)}{\varphi_n^{in}(1, t_i)}$$

$$\begin{array}{c} \div \\ \div \quad \div \\ \div \end{array}$$

DEUXIEME PARTIE

VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

§ 1 - ETUDE DE DEUX SYSTEMES MECANQUES COUPLES

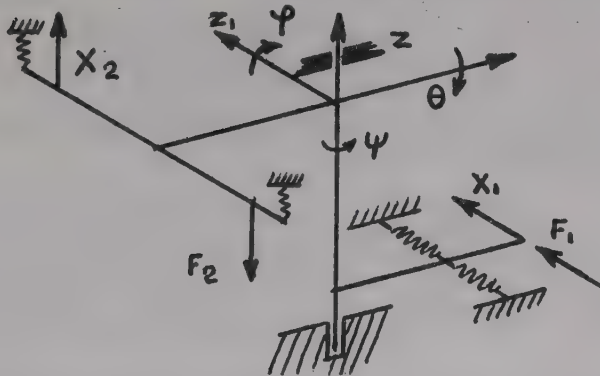
A L'AIDE D'UN DISPOSITIF D'EXPLORATION

DES SORTIES VOIE PAR VOIE

CHAPITRE I - APPLICATION DE LA METHODE DE REPONSE EQUIPHASE A L'ETUDE D'UN SYSTEME A DEUX DEGRES DE LIBERTE COUPLES GYROSCOPIQUEMENT -

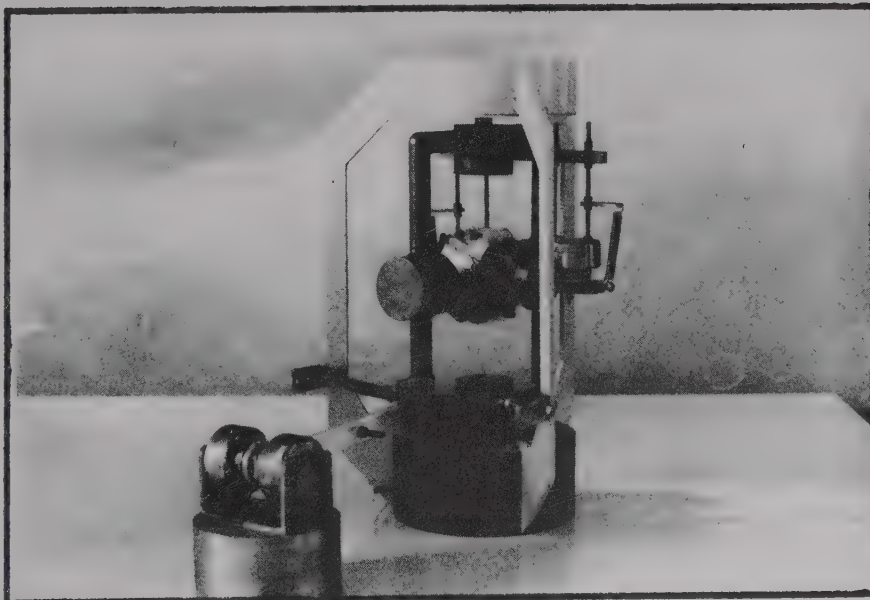
Cette première étude est faite sur un système effectivement à deux degrés de liberté et qui, dans l'approximation des petits mouvements, est linéaire .

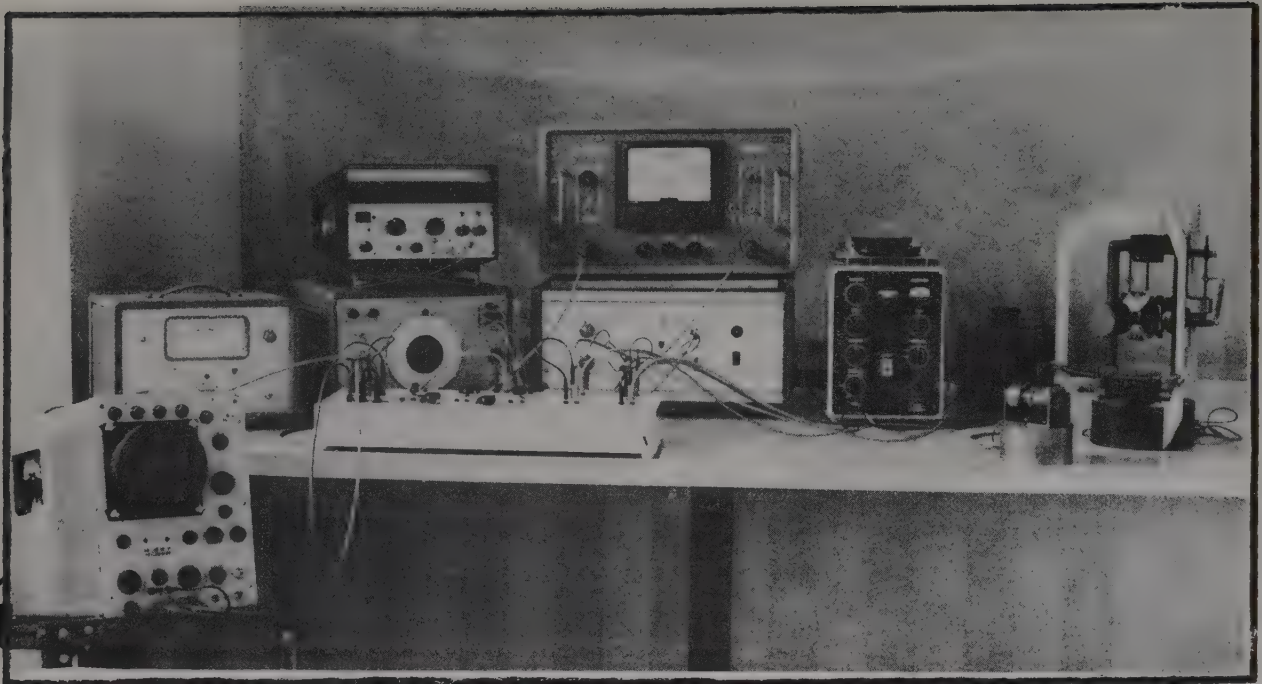
1 - Description du système mécanique -



Le système que nous nous proposons d'étudier est constitué par un gyroscope animé d'une vitesse de rotation φ' autour de son axe z_1 , et monté sur une armature à deux degrés de liberté ψ et θ .

La première armature est sollicitée par une force d'excitation harmonique F_1 , la seconde par une force F_2 , les réponses étant respectivement X_1 et X_2 .

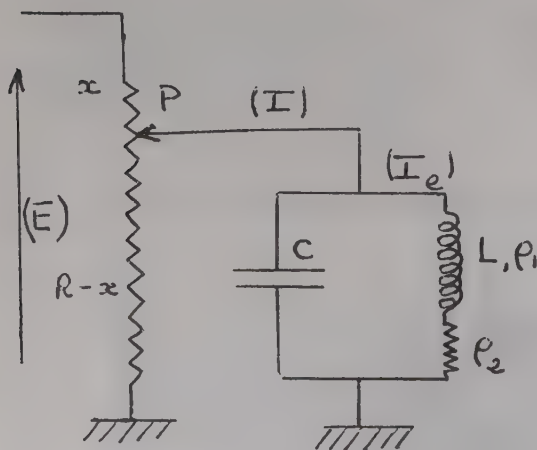




2 - Description du dispositif d'excitation et du circuit de mesure .

2.1 - Chaîne d'excitation -

Un générateur de tension CRC débite dans un ampli de puissance Philips alimentant les deux circuits d'excitation conformes au schéma ci-dessous .



La bobine d'excitation de self L et de résistance ρ_1 est solidaire de la structure et se meut dans un pot magnétique . La force d'excitation est proportionnelle au courant I_e . Le dosage des forces se fait à l'aide d'un potentiomètre P alimenté par l'amplificateur .

Si $(E) = E \cos \omega t$ en posant $\rho_1 + \rho_2 = r$, nous avons visiblement :

$$(I) = \frac{(E)}{x + \frac{r}{1 - LC\omega^2} \cdot \frac{1 + j \frac{L\omega}{r}}{1 + j \frac{rC\omega}{1 - LC\omega^2}} \cdot \frac{R}{R - x}}$$

$$(I_e) = \frac{(I)}{1 - LC\omega^2 + jrC\omega}$$

Nous avons fait choix d'une capacité C telle que $LC\omega^2 \ll 1$, moyennant un choix convenable de r , nous avons :

$$\text{Arg}(I) = \text{Arg}(E) \quad \text{si} \quad rC\omega = \frac{L\omega}{r} \quad \text{soit} \quad C = \frac{L}{r^2}$$

donc :

$$\text{Arg}(I_e) = \text{Arg} I - \text{Arc tg } \frac{L \omega}{r}$$

En conclusion tous les courants I_e sont en phase entre eux, c'est à dire que les forces d'excitation sont en phase .

Avec

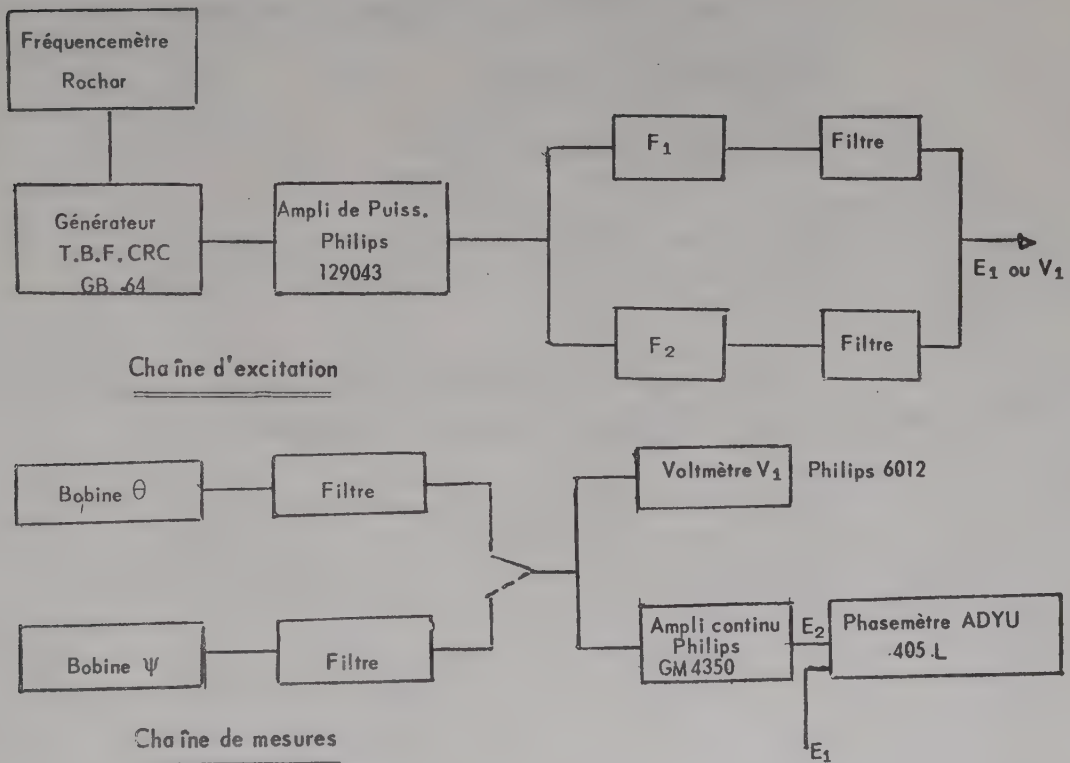
$$\begin{aligned} \rho_1 &= 5 \, \Omega \\ \rho_2 &= 25 \, \Omega \quad \rho_1 + \rho_2 = r = 30 \, \Omega \\ L &= 2 \text{ m H} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $C = 2,2 \, \mu\text{F}$ pour avoir de zéro à 500 hertz un déphasage entre les forces n'excédant pas 10 minutes .

2,2 - Chaîne de mesure

Les capteurs sont constitués par des bobines de fil fin solidaires de la structure se déplaçant dans des pots magnétiques . Chaque bobine peut être connectée à un ampli de tension Philips attaquant un phasemètre ADYU dont l'entrée de référence est connectée à la borne supérieure d'une résistance ρ_2 .

Le schéma fonctionnel du dispositif est finalement le suivant :



Les filtres soigneusement construits (fréquence de coupure 23 Hertz à 20 db décade) éliminent des composantes HF dues au mauvais équilibrage du gyroscope; des filtres de compensation sont montés dans le circuit de mesure des forces .

3 - Résultats expérimentaux

Les mesures consistaient à choisir le rapport entre F_1 et F_2 pour que l'indication du phasemètre soit la même sur les deux voies, la détermination de $\alpha = \cotg \varphi = -\tg(\varphi + \frac{\pi}{2})$ est alors immédiate (les capteurs étant des capteurs vitesses). Les courbes $E(\alpha, \omega)$ ont pu alors être tracées .

La sensibilité des excitateurs étant :

$$k = 1,57 \text{ Newton/Ampère} \quad \begin{cases} \text{voie I rotation } \theta \\ \text{voie II } \psi \end{cases}$$

$$\text{Nous avons } F_{1\max} = \frac{1,57 \sqrt{2}}{22} \times 10^{-3} \text{ V} = 0,101.10^{-3} \text{ Newton/mV}$$

$$\text{avec } \rho_2 = 22 \Omega \quad \rho_1 = 8 \Omega$$

$$F_{2\max} = \frac{1,57 \sqrt{2}}{25} 10^{-3} \text{ V} = 0,089.10^{-3} \text{ Newton/mV}$$

$$\text{avec } \rho_2 = 25 \Omega \quad \rho_1 = 5 \Omega$$

$$X_{1\max} = 0,0226.10^{-3} \times \frac{\text{V m V}}{f \text{ en Hertz}}$$

$$X_{2\max} = 0,026.10^{-3} \times \frac{\text{V m V}}{f \text{ en Hertz}}$$

Ces constantes ont été vérifiées en faisant osciller les armatures entre des butées dont la distance était connue , à une pulsation déterminée .

TABLEAU DES MESURES

GYROSCOPE NE TOURNANT PAS

Voie I : rotation en Ψ

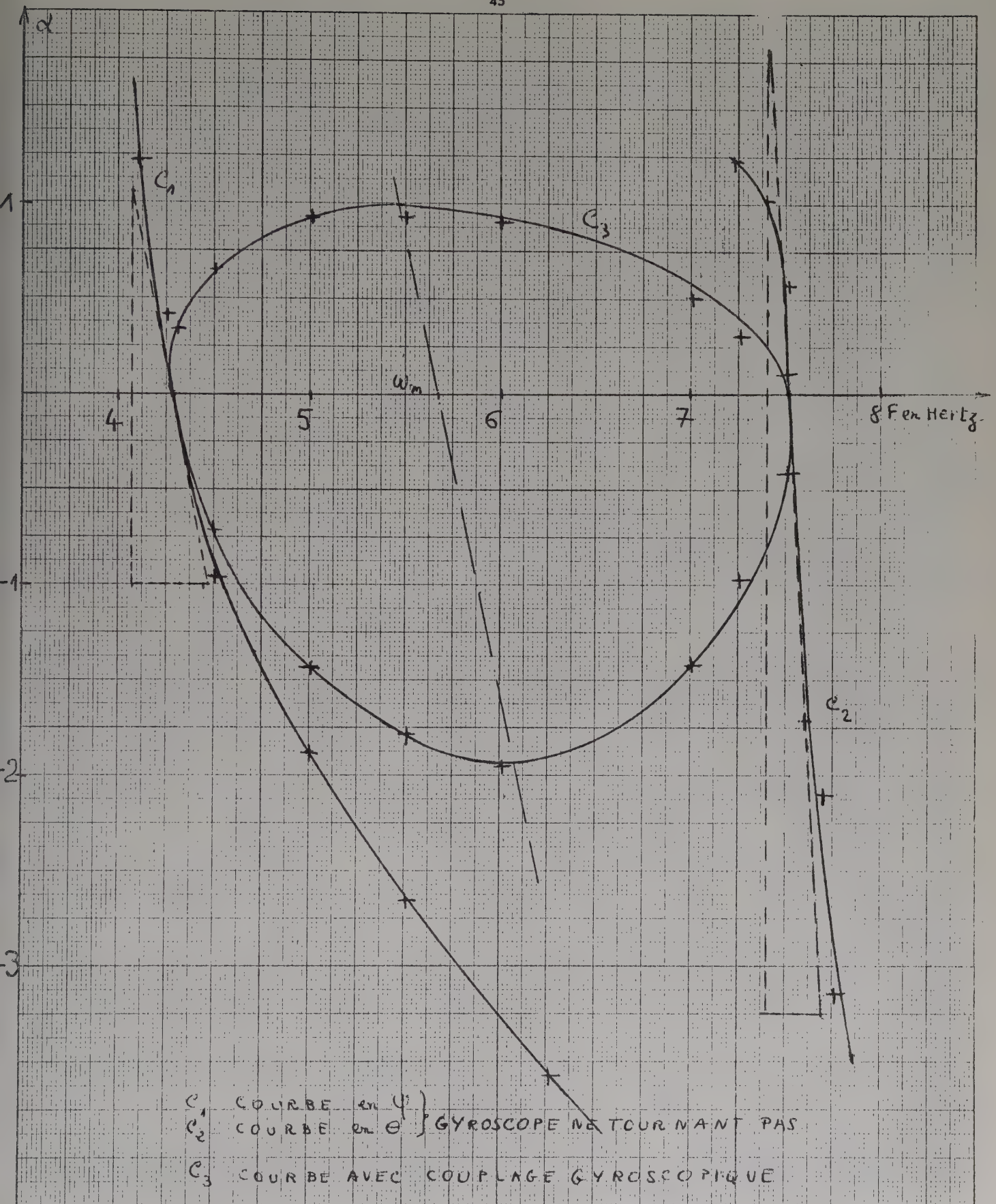
$1/f$	0,244	0,235	0,222	0,2	0,1819	0,1666
f Hertz	4,1	4,25	4,5	5	5,5	6
$\pi/2 - \varphi$	51°	22° 5	- 44°	- 62°	- 69° 5	- 74° 5
α	1,225	0,415	- 0,965	- 1,88	- 2,67	- 3,6
X_1 mV	80	375	365	159	95	70
F_1 mV	540	700	720	700	690	677
X_1 mm	0,511	2,3	2,12	0,826	0,45	0,318
F_1 N	0,048	0,0624	0,064	0,0624	0,0614	0,0603
$X_1/F_1 \times 10^{-3}$	10,65	38,4	33,18	8,26	7,34	5,27

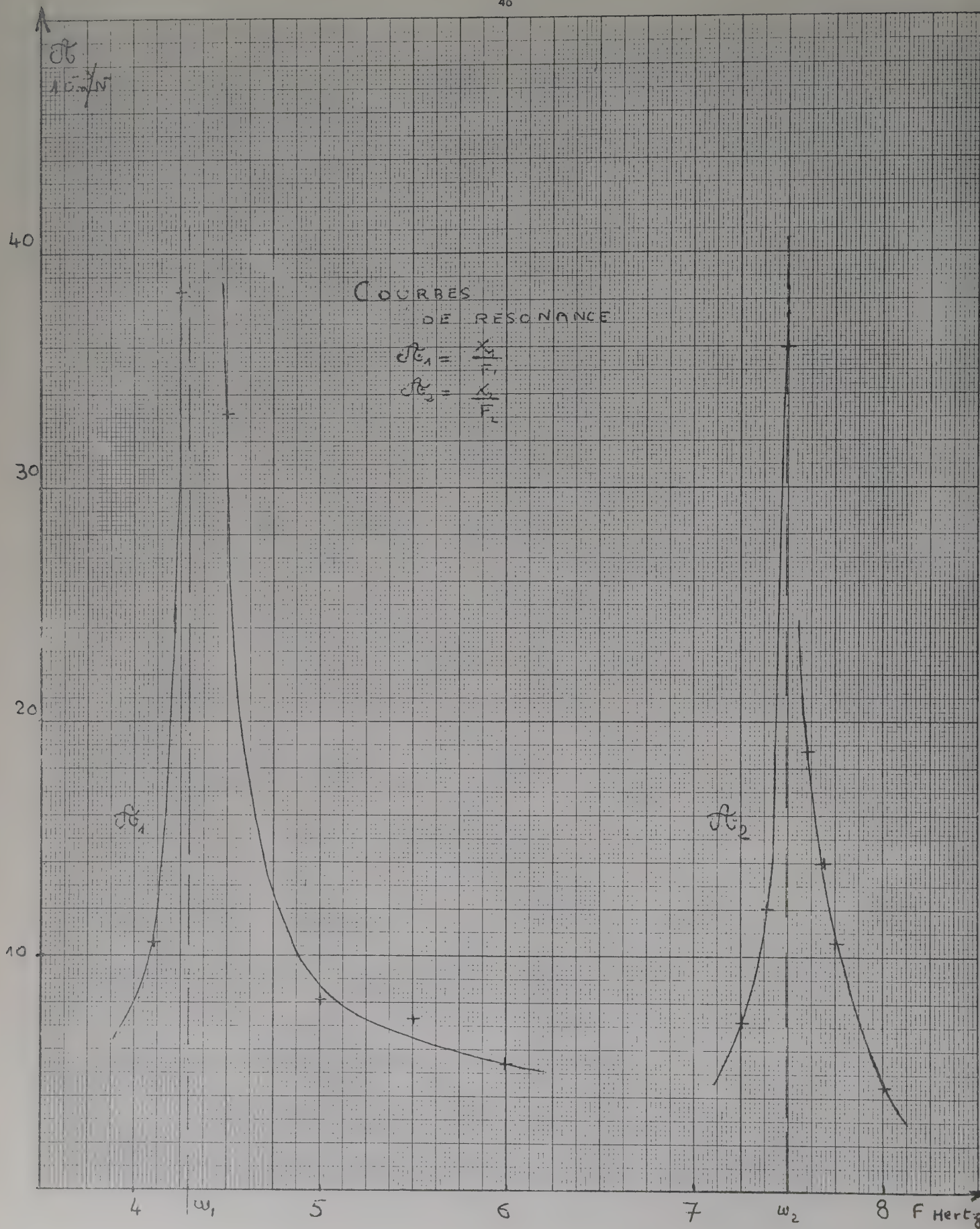
Voie II : rotation en Θ

$1/f$	0,138	0,1350	0,1344	0,1316	0,1304	0,129	0,1251
f Hertz	7,25	7,4	7,5	7,6	7,68	7,74	8
$\pi/2 - \varphi$	50°	45°	18°	- 61°	- 65°	- 72,5°	- 77°
α	1,19	1	0,325	- 1,73	- 2,14	- 3,17	- 4,33
X_2 mV	97	227	620	380	240	185	80
F_2 mV	510	600	509	600	509	505	500
X_2 mm	0,312	0,735	1,83	1,13	0,723	0,542	0,227
F_2 N	0,0514	0,0605	0,0514	0,0605	0,0514	0,0509	0,505
$X_2/F_2 \times 10^{-3}$	$6,12 \times 10^{-3}$	$12,12 \times 10^{-3}$	36×10^{-3}	$18,7 \times 10^{-3}$	$14,08 \times 10^{-3}$	$10,65 \times 10^{-3}$	$4,5 \times 10^{-3}$

$1/f$	0,2322		0,2222		0,2006		0,1821		0,1666		0,1426		0,1379		0,1333	
f Hertz	4,3		4,5		5		5,5		6		7		7,25		7,5	
α	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
$\frac{\pi - \varphi}{2}$	20°	0°	33° 5	- 36°	43° 30	- 57°	43°	- 61°	42°	- 63°	27° 5	- 55°	17° 5	- 45°	5°	- 24
α	0,364		0,662	- 0,725	0,95	- 1,44	0,923	- 1,8	0,923	- 1,96	0,52	- 1,43	0,315	- 1	0,088	- 0,44
$X_2 \text{ mV}_{\text{eff}}$	7		7,4	- 5,8	8,4	- 7,3	15	- 14,2	10,8	- 10	20	- 20	27	- 27,5	38	- 69
$F_2 \text{ mV}$	1000		560	505	450	400	690	575	340	305	288	200	230	157	74	40
$X_2 \text{ mm}$	0,0368		0,0362	- 0,0296	0,038	- 0,0332	0,0619	- 0,0580	0,0404	- 0,0377	0,0788	- 0,0788	0,0842	- 0,0852	0,1144	- 0,206
$F_2 (N \times 10^{-3})$	101		56,6	51	55,5	40,4	69,6	58,1	34,3	30,8	29,1	20,2	23,2	15,86	7,47	4,04
$X_1 \text{ mV}$	79		37	46	24,6	26,8	30	29	15,5	16	14,3	14,3	13	13,9	4	9
$F_1 \text{ mV}$	- 11		- 93	155	- 174	226	- 360	470	- 250	305	- 390	480	- 450	540	- 600	1070
$X_1 \text{ mm}$	0,477		0,2135	0,266	0,126	0,139	0,1414	0,1373	0,067	0,0691	0,0531	0,0495	0,0464	0,05	0,014	0,031
$F_1 (N \times 10^{-3})$	- 0,98		- 8,26	13,8	- 15,5	20,1	- 32	41,8	- 22,2	27,1	- 34,7	42,7	- 40	48	- 53,4	95,1
	A						α_{max}			α_{mini}					B	

TABLEAU DES MESURES AVEC COUPLAGE GYROSCOPIQUE





3.2 Exploitation des résultats expérimentaux

Calcul des coefficients des matrices et des fréquences propres.

Détermination des ω_i :

Nous les obtenons en considérant les zéros de la courbe $E(\alpha, \omega)$,
le gyroscope tournant .

$$\omega_1 = 2\pi \times 4,3 = 27 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 2\pi \times 7,5 = 47,2 \text{ rad/s}$$

Calcul de b

$$\text{en A} \quad X_{\text{normalisé}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,077 \end{bmatrix} \quad F_N = \begin{bmatrix} -2,06 \\ 212 \end{bmatrix} \quad \cos 20^\circ$$

$$\text{en B} \quad X_{\text{normalisé}} = \begin{bmatrix} 0,122 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F_N = \begin{bmatrix} -466 \\ 6,52 \end{bmatrix} \quad \cos 5^\circ$$

$$b_{\omega_2} = -466$$

$$b = -9,9 \text{ N/m/s}$$

$$b_{\omega_1} = -212 \times 0,94$$

$$b = -7,4 \text{ N/m/s}$$

$$b_{\text{moyen}} = -8,6 \text{ N/m/s}$$

Calcul de $m_1, m_2, k_1, k_2, b_1, b_2$.

Pour $\omega_n = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 2\pi \sqrt{4,3 \times 7,5} = 35,7 \text{ rad/s}$, la courbe ne présente pas d'extremum , ceux-ci sont situés de part et d'autre de cette valeur . Le calcul sera fait par interpolation linéaire entre 5,5 et 6 Hertz .

$$f = 5,5 \text{ Hertz} \quad \alpha_m = 0,923$$

$$X_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,437 \end{bmatrix}$$

$$f = 6 \text{ Hertz} \quad \alpha_m = -1,96$$

$$X_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,546 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 1,44 \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4915 \end{bmatrix}$$

$$m_1 m_2 \times \frac{8,6 \times 1,44}{20,2} = 0,614 \quad m_1 m_2 = 0,784$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \times (0,4915)^2 = 0,1382$$

$$k_1 \cdot k_2 = (\omega_1 \omega_2)^2 m_1 m_2 = (27 \times 47,2)^2 \times 0,784 = 1.270.000$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 3030 \text{ N/m} \\ k_1 &= 420 \text{ N/m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,42 \text{ Kg} \\ m_2 &= 1,36 \text{ Kg} \end{aligned}$$

Coefficient d'amortissement en ψ et θ

La pente de la tangente en ω_1 permet de calculer le coefficient d'amortissement

$$\text{en } \psi \quad \frac{2m_1}{b_1} = \frac{2 \times 4}{1,6 \times 2 \pi} \text{ soit } b_1 = \frac{1,6 \pi}{2} m_1$$

$$b_1 = 1,07 \text{ N/m/s}$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{b_1}{2m_1 \omega_{01}} = 4,7 \cdot 10^{-2}$$

La pente de la tangente en ω_2 permet de calculer le coefficient d'amortissement

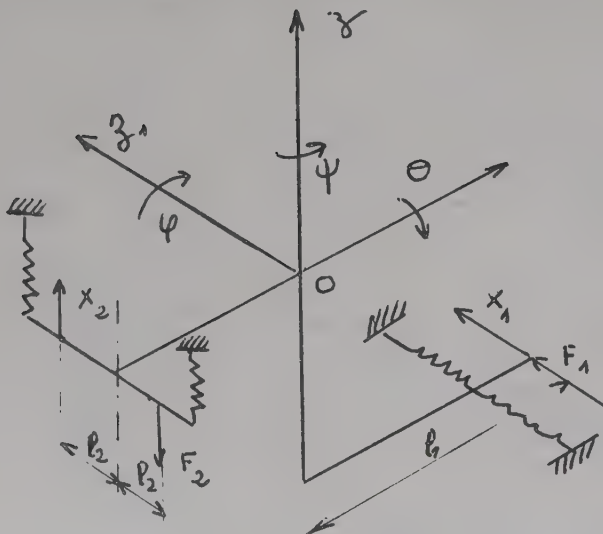
$$\text{en } \theta \quad \frac{2m_2}{b_2} = \frac{5 \times 4}{1,7 \times 2 \pi} \text{ soit } b_2 = \frac{2,4 \pi}{10} m_2$$

$$b_2 = 1,03 \text{ N/m/s}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{b_2}{2m_2 \omega_{02}} = 0,8 \cdot 10^{-2}$$

3.3 - Valeurs des coefficients données par d'autres méthodes

3.3.1 - Equation des petits mouvements - régime stationnaire



Le trièdre $(\vec{n}, \vec{v}, \vec{z}_1)$ est direct

$$\vec{m}(\mathcal{R}, 0) = \vec{m}(F, 0)$$

Le moment dynamique dû au terme gyroscopique est :

$$\vec{\Omega}_E \wedge C\varphi_1 \vec{z}_1 = (\psi' \vec{z}_1 + \theta' \vec{n}) \wedge C\varphi_1 \vec{z}_1$$

$$\varphi' = r$$

Sur $\vec{z}$ les équations du mouvement sont :

$$I_1 \psi'' + Cr \theta' = -C_1 \psi + F_1 l_1$$

Sur $\vec{n}$:

$$I_2 \theta'' - \psi' Cr = -C_2 \theta + F_2 l_2$$

Avec $\psi = \frac{X_1}{\ell_1}$ $\psi = \frac{X_2}{\ell_2}$ le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$MX'' + GX' + KX = F \text{ avec}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{I_1}{\ell_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{I_2}{\ell_2^2} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{C_r}{\ell_1 \ell_2} \\ -\frac{C_r}{\ell_1 \ell_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{\ell_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{C_2}{\ell_2^2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

3.3.2 . Détermination des coefficients des matrices par des méthodes classiques .

Mesure de φ' : Cette mesure a été effectuée au Stroboscope Philips PR9103 . Les mesures permettent de conclure que le gyroscope tourne à 905 rd/s dans le sens négatif.

Mesure de C : C'est le moment d'inertie du rotor ; nous avons mesuré le temps d'arrêt avec et sans surcharge d'inertie connue $dC = 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ Kg. m}^2$

$$C = \frac{dC}{\frac{t'}{t} - 1}$$

La moyenne de 5 mesures étant 1,49 pour $\frac{t'}{t}$ nous obtenons $C = 2,04 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$

Matrice G :

$$b = \frac{C_r}{\ell_1 \ell_2} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} \ell_1 = 0,324 \text{ m} \\ \ell_2 = 0,064 \text{ m} \end{matrix}$$

Soit $b = -8,90 \text{ N/m/s}$.

Matrice K : Les essais statiques prévus (Méthode de Poggendorff) ont donné :

$$C_2 = 7,75 \text{ N} \times \text{m}$$

$$C_1 = 46,5 \text{ N} \times \text{m}$$

$$\frac{C_2}{\ell_2^2} = 1820 \text{ N/m} \quad \frac{C_1}{\ell_1^2} = 440 \text{ N/m}$$

Termes diagonaux de la matrice G .

Ces termes ont été mesurés sur des courbes de « lâcher » enregistrées sur Enregistreur SEFRAM. La décroissance des oscillations est exponentielle .

Nous avons trouvé :

$$\varepsilon_{\psi} = 5,5 \cdot 10^{-2}$$

$$\varepsilon_{\theta} = 1,2 \cdot 10^{-2}$$

4 - Conclusions -

4,1 - Comparaison des courbes $E(\alpha, \omega)$ avec les courbes théoriques .

La courbe théorique à tangentes verticales au voisinage de ω_1 et ω_2 et symétrique par rapport à l'axe des ω a été déformée par le frottement visqueux, mais la droite qui joint les deux sommets coupe l'axe des ω au point $\omega_m = 5,68$ rd/s , soit sensiblement $\sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2}$.

4,2 - Précision des résultats ,

La valeur du b moyen obtenue par la méthode de surcharge concorde très bien avec celle obtenue par la méthode de réponse équiphase malgré l'approximation faite sur les termes diagonaux .

Les valeurs de k_1 et k_2 sont du même ordre de grandeur et diffèrent au maximum de 17 %; cette différence est due ici à l'interpolation faite sur les valeurs de X entre $\omega = 5,5$ et 6 Hertz, introduisant une erreur systématique .

Les valeurs des coefficients d'amortissement ε sont faibles .

Pour ε_{ψ} , les deux valeurs trouvées $4,7 \cdot 10^{-2}$ et $5,5 \cdot 10^{-2}$ sont tout à fait comparables, c'est-à-dire entachées de la même erreur .

Les deux valeurs de ε_{θ} sont assez différentes, mais la précision sur la pente de la tangente à la courbe $E(\alpha, \omega)$ est très faible .

Conformément à ce qui était prévu, les pentes des courbes au voisinage de ω_1 et ω_2 sont indépendantes du couplage gyroscopique .

La méthode de la réponse équiphase donne en somme des résultats concordant avec les résultats obtenus par des méthodes plus directes, mais a l'avantage d'être plus générale.

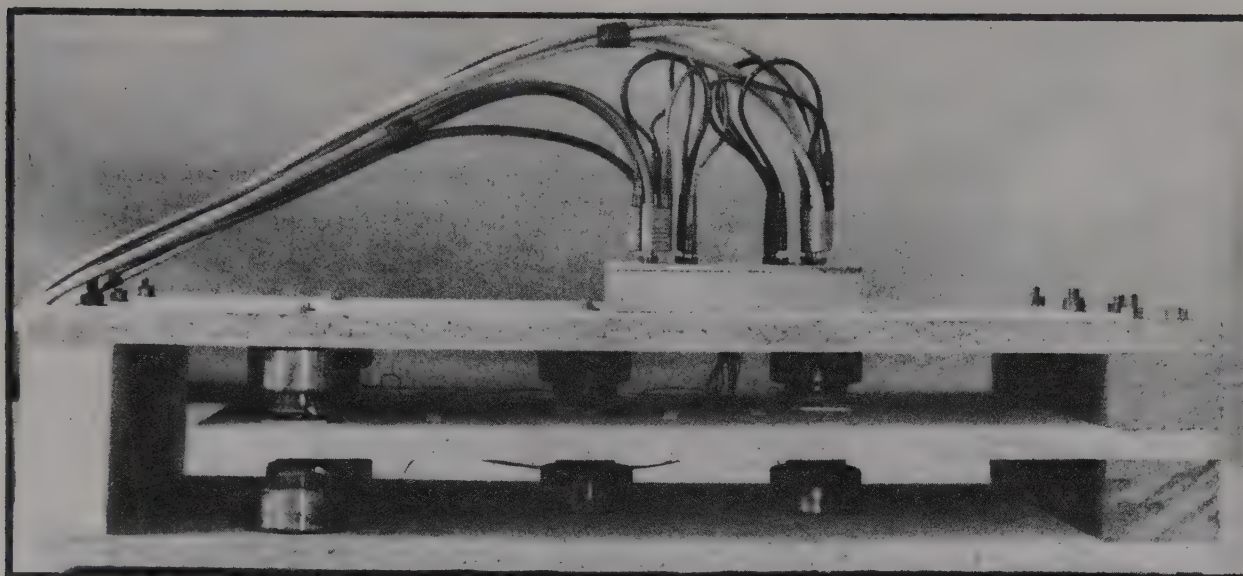
L'approximation que nous avons faite, en supposant le couplage purement gyroscopique, a permis de vérifier les formules de ce type de couplage ; l'erreur de 17 % sur k aurait pu théoriquement être évitée sans cette approximation à partir des courbes et des équations (1) et (2) résolues avec une matrice B pleine, tenant compte de l'amortissement de structure, mais étant donnée l'incertitude sur la pente des courbes, la précision n'aurait guère été améliorée .

÷
÷ ÷
÷

CHAPITRE II - APPLICATION DE LA METHODE DE REPONSE EQUIPHASE A L'ETUDE D'UN SYSTEME COUPLE A QUATRE DEGRES DE LIBERTE :

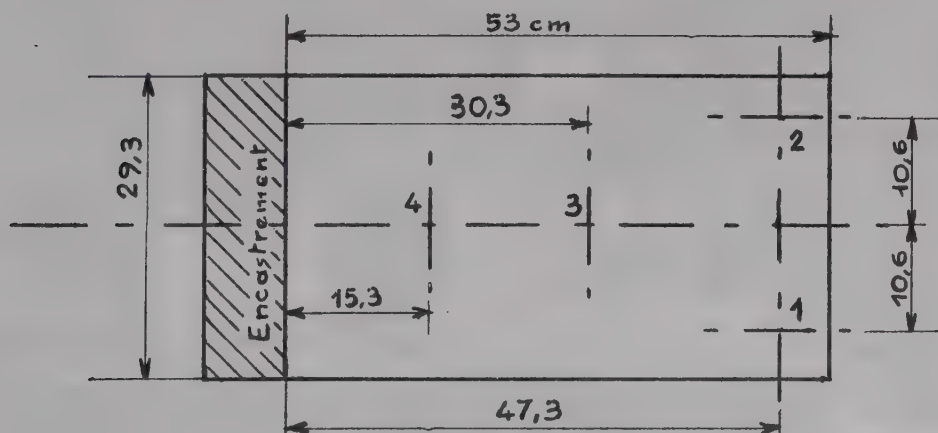
ETUDE D'UNE POUTRE LARGE ENCASTREE A UNE EXTREMITE .

Le système que nous nous proposons d'étudier est continu. Nous faisons l'hypothèse qu'en basses fréquences, il peut être assimilé à un système discret à quatre degrés de liberté .



1 - Description du système mécanique .

La poutre que nous avons étudiée est montée conformément au schéma suivant . Nous l'avons choisie en matériau aggloméré pour avoir un amortissement appréciable.



2 - Description du dispositif de mesures -

Nous avons utilisé pour l'excitation les mêmes circuits que dans le cas d'un système à deux degrés de liberté (Deuxième Partie . par. 1 - Chapitre I -2) . La chaîne de mesures nous permettait d'explorer voie par voie les sorties des capteurs c'est-à-dire de mesurer la tension φ aux bornes de chaque capteur vitesse et la phase par rapport à une phase de référence φ^* , choisie arbitrairement et obtenue à l'aide de circuits simples : résistance , capacité .

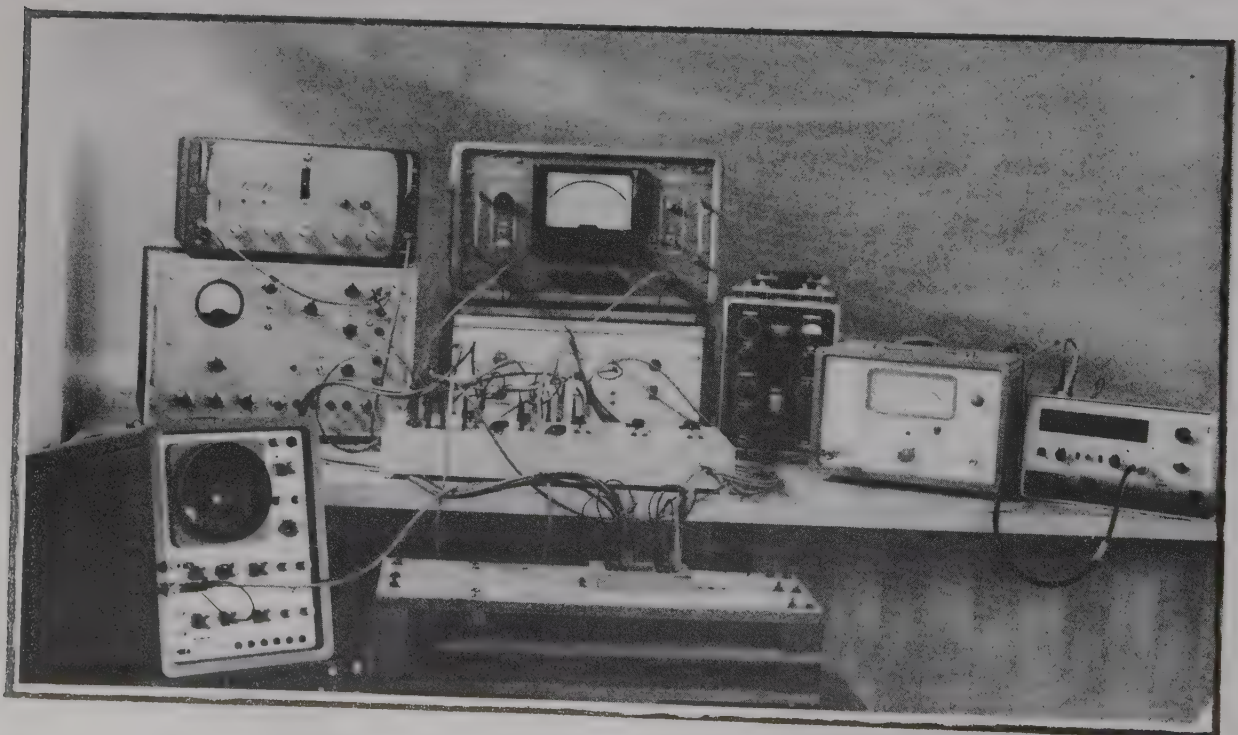
Le schéma fonctionnel de l'ensemble est donné ci-après ainsi que le circuit du pont de phase à transistors utilisé (Bascule de Schmidt à caractéristique en dents de scie s'annulant pour des déphasages entre φ^* et φ valant $(-\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \dots)$ La tension lue au voltmètre continu est proportionnelle au déphasage entre les deux entrées du pont dont la constante de temps, dépendant du circuit intégrateur de sortie, est d'environ une demi-seconde .

Les mesures consistaient à déterminer la phase sur chaque voie pour un vecteur force fixé arbitrairement, à calculer la somme :

$$\sum_{i=1,2,3,4} \left| \varphi_i - \varphi^* + \frac{\pi}{2} \right|$$

et à agir sur les composantes du vecteur force F et sur φ^* pour minimiser cette somme .

La résonance équiphasée étant obtenue par approximations successives à partir de cette méthode de zéro, la mesure des forces et des déplacements se faisait sur le voltmètre Philips, le déphasage $\varphi = \varphi^* - \frac{\pi}{2}$ se lisait sur le phasemètre ADYU en tenant compte éventuellement d'un déphasage parasite ε .



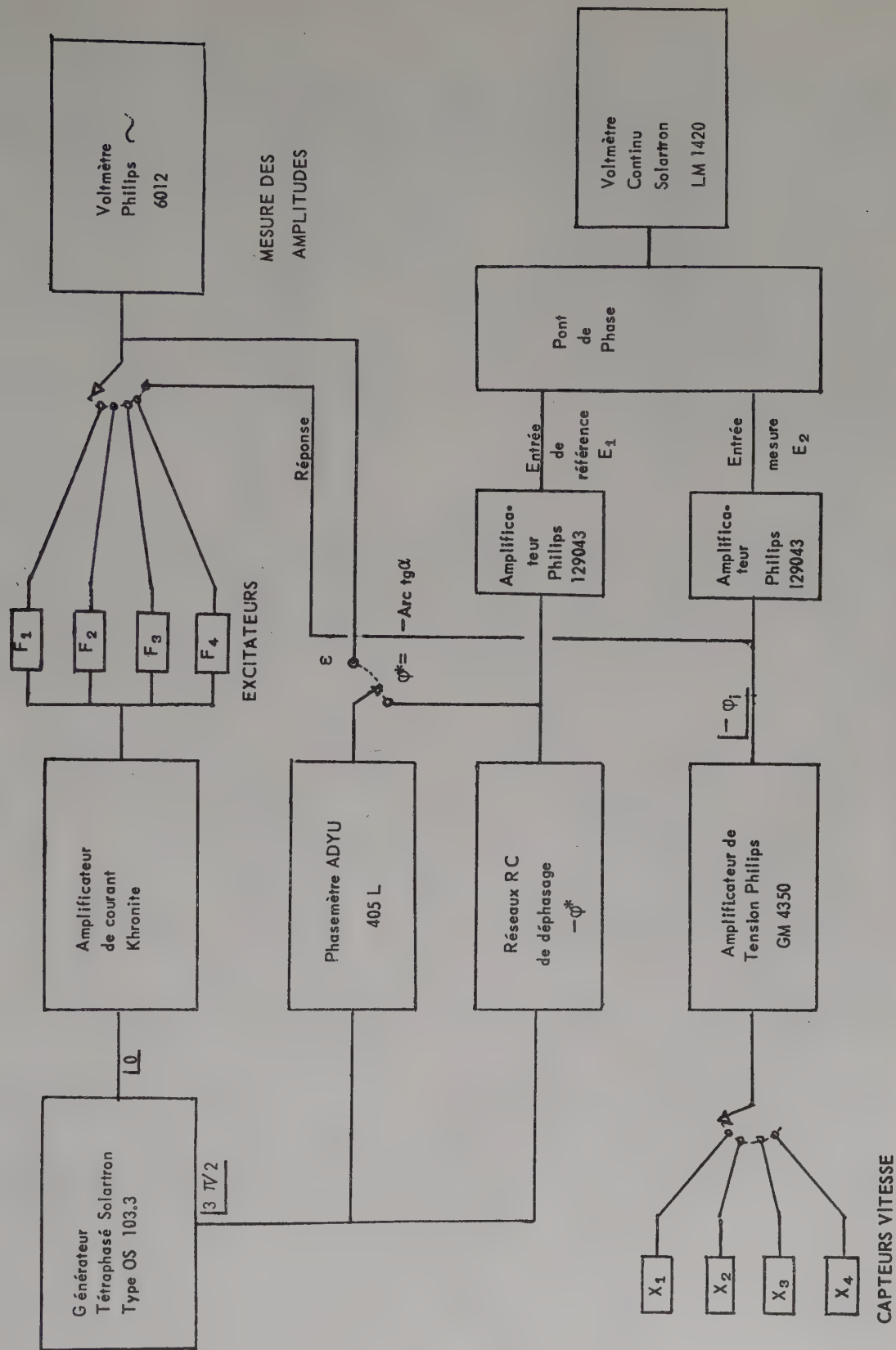
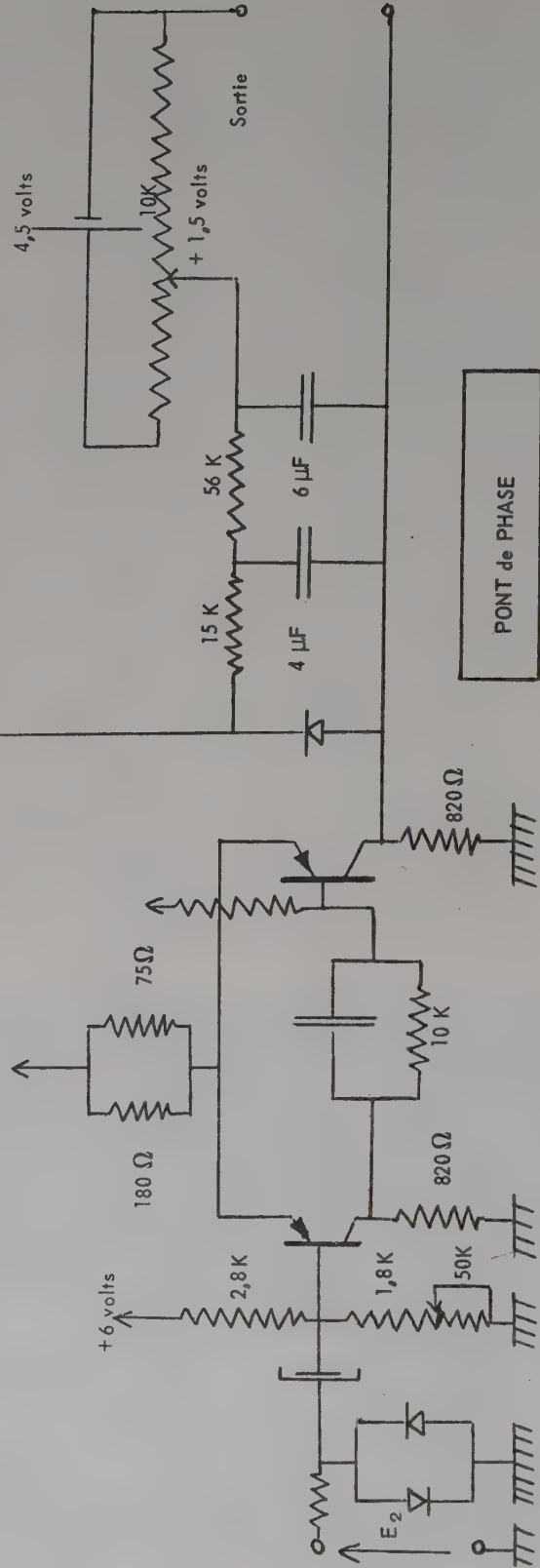
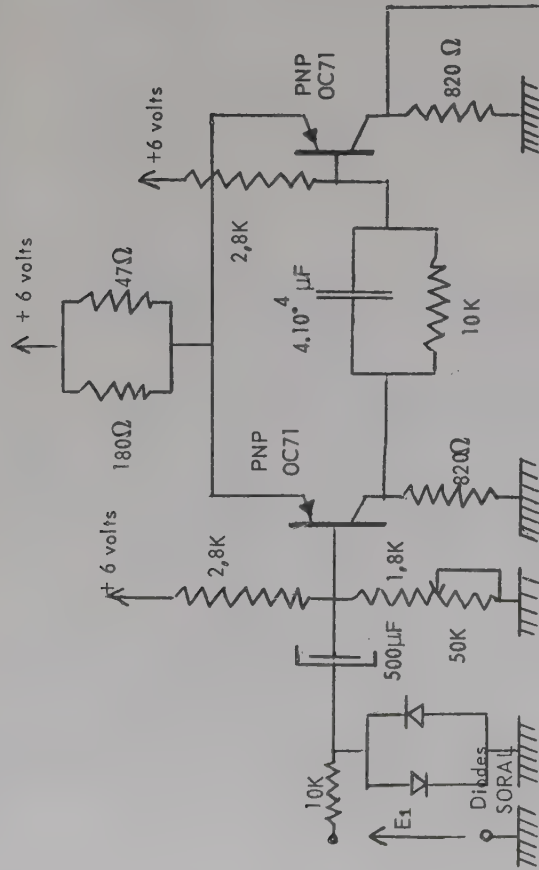
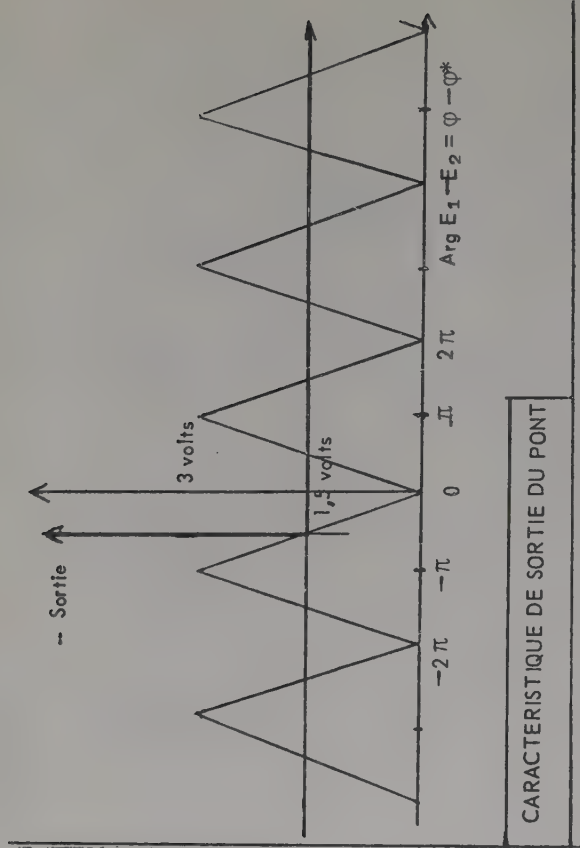


Schéma fonctionnel de l'ensemble



3 - Résultats expérimentaux -

La sensibilité des capteurs et des excitateurs étant donnée par le tableau ci-dessous, nous avons obtenu les matrices $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{F}$, par interpolation linéaire entre les différents points des courbes équiphasés, lorsque la résonance était très aiguë.

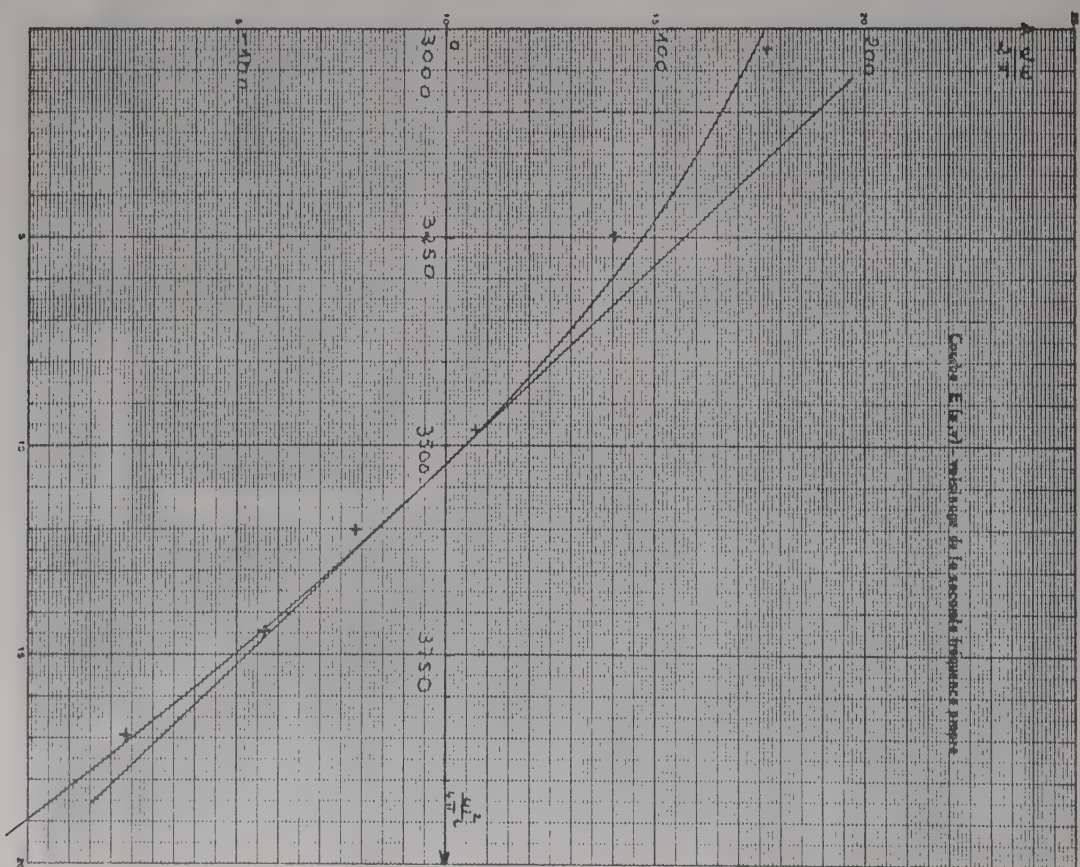
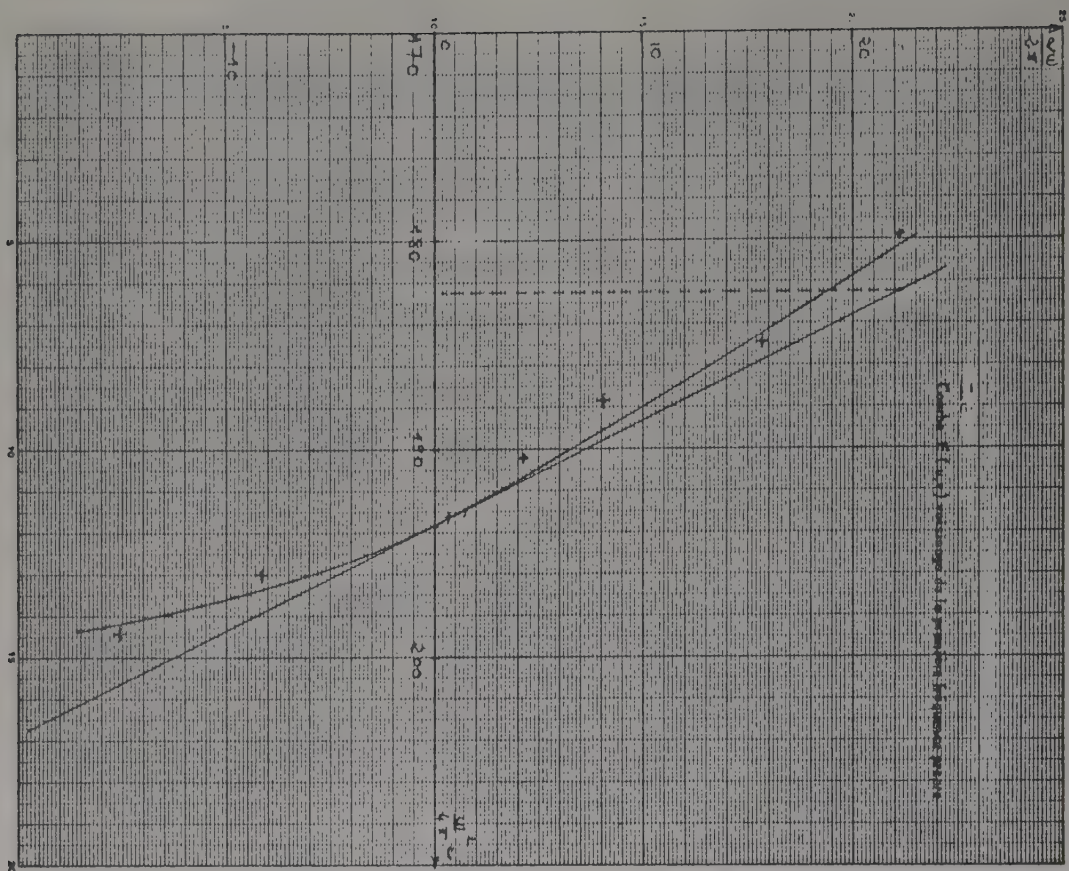
Sensibilité des excitateurs		Sensibilité des capteurs	
F_1	$0,1068.10^{-3} \text{ N/mV}$	$X_1 = 0,026.10^{-3} \times \frac{\text{Vm Volts}}{f \text{ en Hertz}}$	
F_2	$0,0808.10^{-3} \text{ N/mV}$	$X_2 = 0,024.10^{-3} \times \frac{\text{Vm Volts}}{f \text{ en Hertz}}$	
F_3	$0,086.10^{-3} \text{ N/mV}$	$X_3 = 0,0244.10^{-3} \times \frac{\text{V en millivolts}}{f \text{ en Hertz}}$	
F_4	$0,0925.10^{-3} \text{ N/mV}$	$X_4 = 0,026.10^{-3} \times \frac{\text{Vm V}}{f \text{ en Hertz}}$	

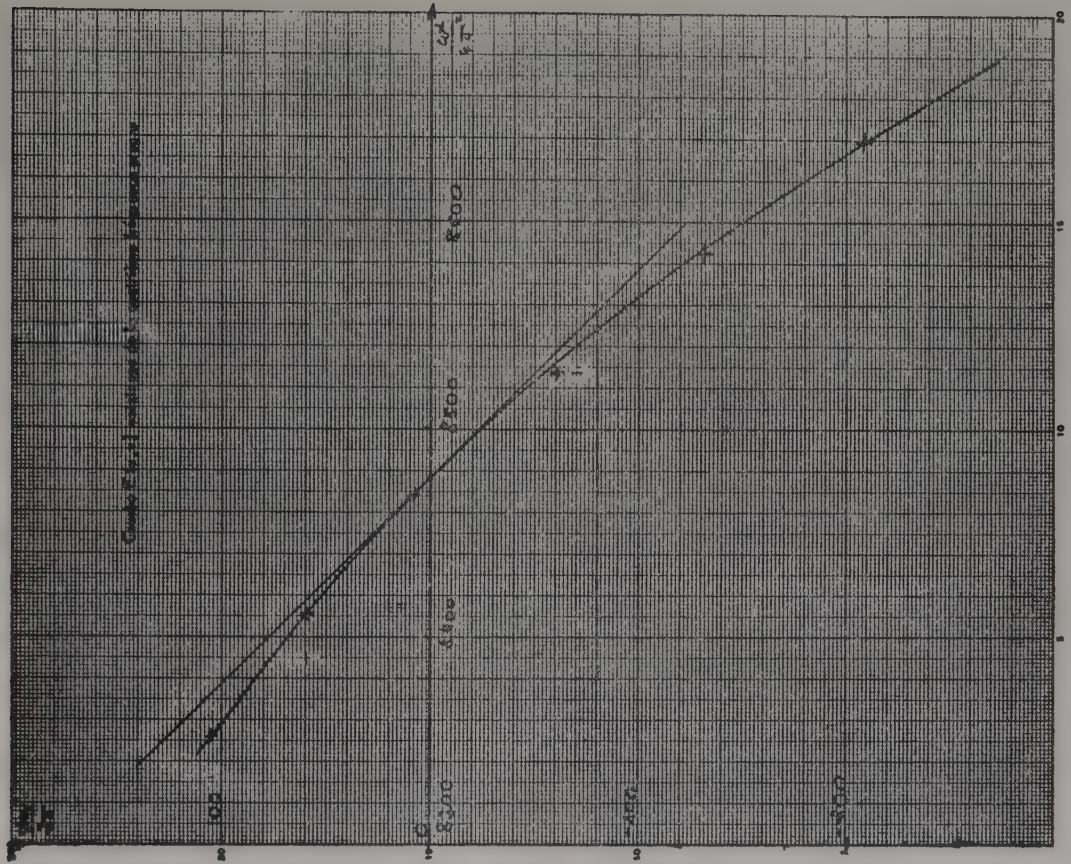
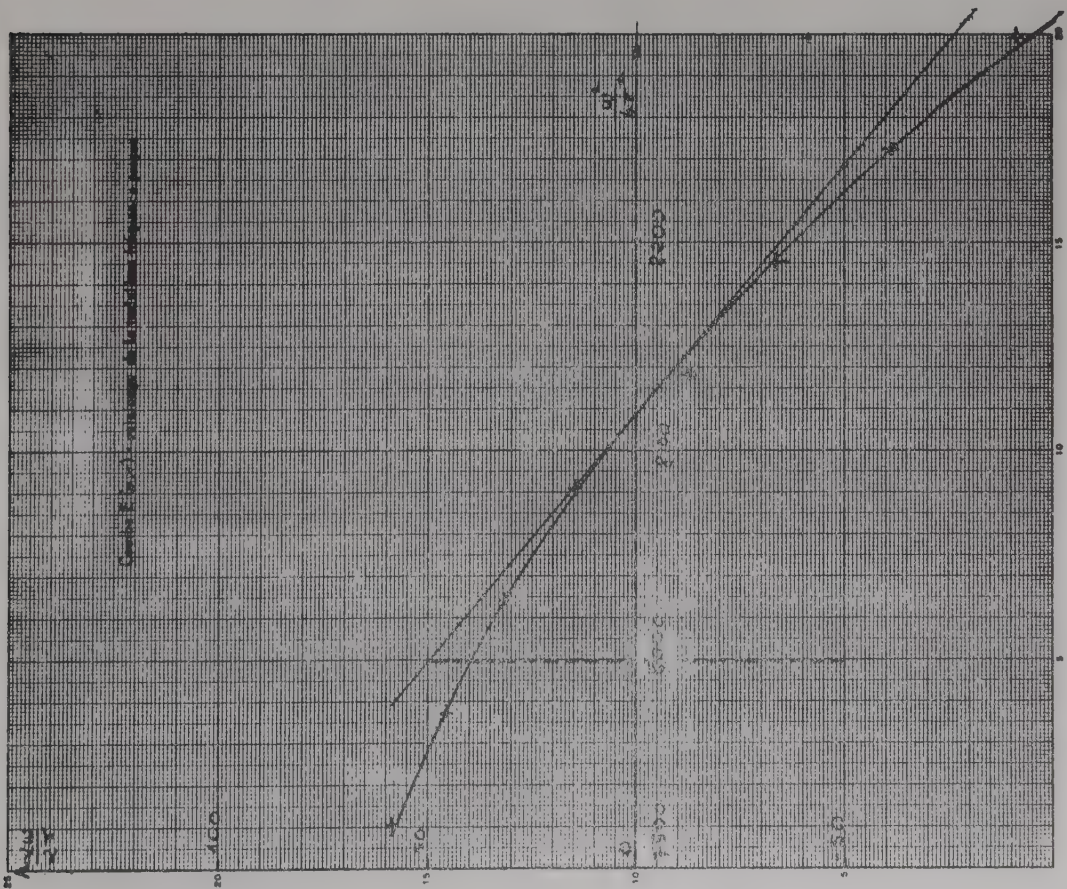
Tableau récapitulatif des mesures effectuées

Première forme propre Flexion		Deuxième forme propre Torsion		Troisième forme propre		Quatrième forme propre	
$\frac{\alpha(\omega)}{2\pi} = \alpha f$ rad/s	$\frac{\omega^2}{4\pi^2} = f^2$ (Hertz) ²	αf	f^2	αf	f^2	αf	f^2
22,34	179,56	154	3025	58,1	7921	105	83521
15,65	184,96	81	3249	45,5	7979,49	59	84100
8,1	187,69	14,8	3481	31,7	8028,16	- 9,3	84681
4,3	190,44	- 12,8	3540,25	14,22	8082,01	- 61,2	85264
0,72	193,21	- 43,5	3600	- 12,7	8136,04	- 131,2	85849
- 8,26	196	- 86,5	3721	- 33,2	8190,25	- 20,8	86499
- 16,1	198,81	- 153	3844	- 61	8244,64		
- 23,7	210,25			- 91,1	8299,21		

REMARQUE - Les lectures de fréquences sont faites avec trois chiffres sur le générateur Solartron; le carré des fréquences a été lu sur des tables de Barlow.

Matrice des modes propres normalisés en mètres				Matrice des forces en Newton			
1	-0,95	-0,595	0,038	19,8	-300	-72500	0
0,965	1	-0,691	0,046	16,55	+270	- 8590	0
0,495	0	1	-0,111	206	0	17750	0
0,1372	0	0,945	1	180	0	12660	51000
Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	F_1	F_2	F_3	F_4





Le tableau αf en fonction de f^2 permet de tracer, à une affinité près, dans le plan (u, v) les courbes $E(u, v)$, où, rappelons-le, $\begin{cases} u = \alpha \omega \\ v = \omega^2 \end{cases}$

Les pentes de ces courbes permettent de déterminer les rapports $\frac{\mu_{ii}}{\beta_{ii}}$; leurs zéros donnent les fréquences propres du système non amorti. Ces déterminations ont été effectuées sur les courbes ci-jointes.

Ainsi :

$$\frac{\mu_{11}}{\beta_{11}} = \frac{22,3}{112 \times 2 \pi} = 0,318 \text{ Kg/N/m s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 7640 \text{ (rd/s)}^2 \\ \omega_1 &= 87,4 \text{ rd/s} \end{aligned}$$

$$\frac{\mu_{22}}{\beta_{22}} = \frac{158,5}{425 \times 2 \pi} = 0,066 \text{ Kg/N/m s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= 139\,200 \text{ (rd/s)}^2 \\ \omega_2 &= 363,1 \text{ rd/s} \end{aligned}$$

$$\frac{\mu_{33}}{\beta_{33}} = \frac{100}{2400 \times 2 \pi} = 0,00664 \text{ Kg/N/m s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \omega_3^2 &= 320\,309 \text{ (rd/s)}^2 \\ \omega_3 &= 565,97 \text{ rd/s} \end{aligned}$$

$$\frac{\mu_{44}}{\beta_{44}} = \frac{180}{2000 \times 2 \pi} = 0,0143 \text{ Kg/N/m s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \omega_4^2 &= 3345993 \text{ (rd/p)}^2 \\ \omega_4 &= 1828,6 \text{ rd/s} \end{aligned}$$

Les matrices $\tilde{\mathcal{Z}}$ et $\mathcal{F}$, permettent de déterminer la matrice β

$$\beta = \tilde{\mathcal{Z}} \begin{bmatrix} \frac{F_1}{\omega_1} & \frac{F_2}{\omega_2} & \frac{F_3}{\omega_3} & \frac{F_4}{\omega_4} \end{bmatrix}$$

Les pentes des courbes $\frac{\mu_{ii}}{\beta_{ii}}$ et les termes diagonaux de β permettent de déterminer les μ_{ii} , puis les $\gamma_{ii} = \mu_i \omega_i^2$.

Le calcul des matrices M, B, K est alors possible.

÷
÷ ÷

Les calculs ont été effectués sur l'I B M 250 de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et les résultats sont donnés dans le tableau suivant ..

$$\beta = \begin{bmatrix} 1,858 & - 0,108 & - 1,88 & 3,826 \\ 0,025 & + 1,1528 & - 1,30 & 0,000 \\ 4,037 & - 0,0222 & 70,609 & 26,356 \\ 1,8115 & + 0,0028 & 17,702 & 27,89 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \mu_{11} & \mu_{22} & \mu_{33} & \mu_{44} \\ 0,591 & 0,100 & 0,468 & 0,0398 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} Y_{11} & Y_{22} & Y_{33} & Y_{44} \\ 4514,6 & 13300 & 150180 & 133360 \end{array}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0,1362 & 0,0774 & 0,0474 & 0,0012 \\ 0,0774 & 0,12507 & 0,0496 & 0,001 \\ 0,0474 & 0,04961 & 0,3749 & 0,0091 \\ 0,0012 & 0,00131 & 0,0091 & 0,0372 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 11169 & 3759 & - 29580 & 11957 \\ 3759 & 10361 & - 27500 & 11374 \\ - 29587 & - 27507 & 139140 & - 77180 \\ 11957 & 11374 & - 77180 & 111975 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2,863 & 1,894 & - 8,700 & - 1,161 \\ 2,474 & 3,094 & - 10,266 & - 1,375 \\ - 4,813 & - 4,572 & 22,596 & 2,901 \\ - 0,029 & 0,028 & - 3,573 & 27,49 \end{bmatrix}$$

4 - Conclusion

Les calculs ayant été effectués sur machine, les erreurs ne peuvent provenir que des mesures ou des hypothèses de départ .

Considérations sur les matrices .

M et K étant, par construction, symétriques, intéressons-nous d'abord aux matrices d'amortissement :

Matrice B : Nous voyons que la matrice B est sensiblement symétrique pour ses éléments 11 et 12 ; le couplage 1,2 est très important .

A mesure que l'ordre des lignes et des colonnes augmente, la symétrie de B est de moins en moins vérifiée . Pour les éléments 4 j et i 4 B est quelconque .

Pour les deux premières fréquences propres (Flexion quart d'onde et torsion), l'hypothèse d'un système à quatre degrés de liberté est acceptable; elle l'est moins pour la troisième fréquence propre et insuffisante pour la quatrième, au moins en ce qui concerne les coefficients d'amortissement , La résonance de phase au voisinage de cette fréquence n'a d'ailleurs été obtenue qu'en moyenne .

Matrice β : Cette matrice, même pour ses éléments de rang faible, n'est pas diagonale. Il semble que, même en augmentant le nombre de degrés de liberté, ce caractère subsiste .

Matrice M : Les termes sont du même ordre de grandeur, ce qui traduit la distribution uniforme des masses dans la poutre .

Matrice K : Les termes d'indice élevé sont très importants; cette grande rigidité est une des raisons pour lesquelles nous avons eu des difficultés à obtenir la quatrième forme propre, l'énergie fournie à la plaque pour obtenir des déformations mesurables avec précision, étant insuffisante .

Spectre des pulsations propres

Le spectre des pulsations propres trouvées est

$$\{ 87,4 \text{ rad/s} ; 363,1 ; 565,97 ; 1828,6 \}$$

Or, mise à part la deuxième valeur (Torsion), les pulsations 1, 3, 4 devraient être dans le rapport:

$$\{ 1 ; (\text{torsion}) ; \frac{3,51}{0,560} ; \frac{9,82}{0,560} \}$$

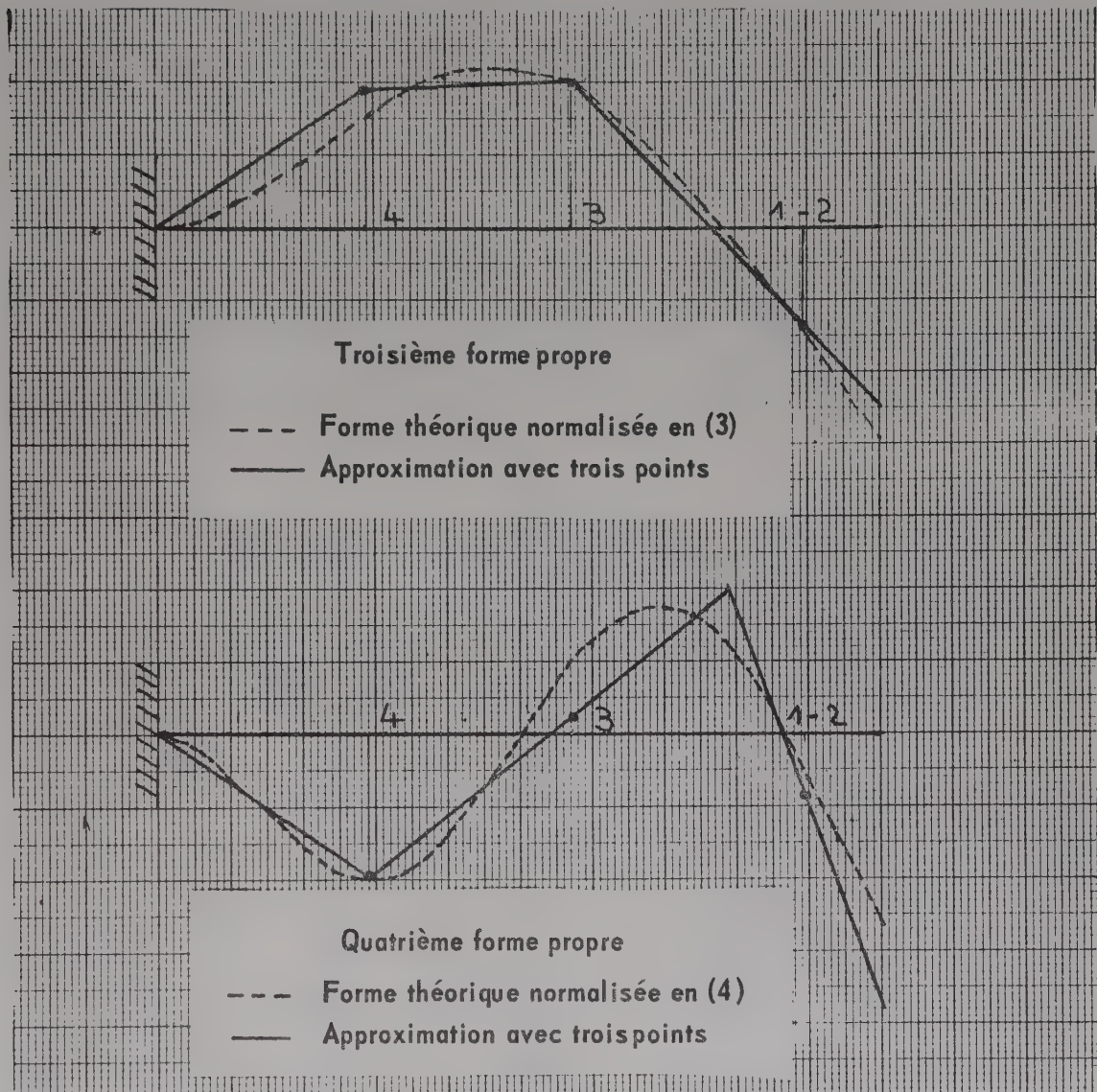
ce qui donnerait le spectre :

$$\{ 87,4 ; (\text{torsion}) ; 549 ; 1532 \}$$

Le système est plus rigide qu'une barre encastrée; cet accroissement de rigidité semble être dû au dispositif de fixation des pots , particulièrement rigide et portant sur une surface de la plaque non négligeable.

Formes propres

Les formes propres Z_3 et Z_4 présentent des noeuds de vibration. Le diagramme ci-dessous permet de faire une étude comparative entre les formes théoriques (Bishop et Johnson, pages 384 et 385) et les formes obtenues .



L'imprécision des mesures sur la quatrième forme propre vient, en partie, de la proximité des excitateurs 1, 2 et 3 des noeuds de vibration.

L'amplitude élevée au point 4 permet de déceler la non rigidité absolue de l'encastrement d'extrémité .

§ 2 - ETUDE D'UN DISPOSITIF ELECTRONIQUE DE SOMMATION DE DEPHASAGES

APPLICATION A LA RECHERCHE DES MATRICES

DE COUPLAGE D'UN SYSTEME CONTINU SCHEMATISE

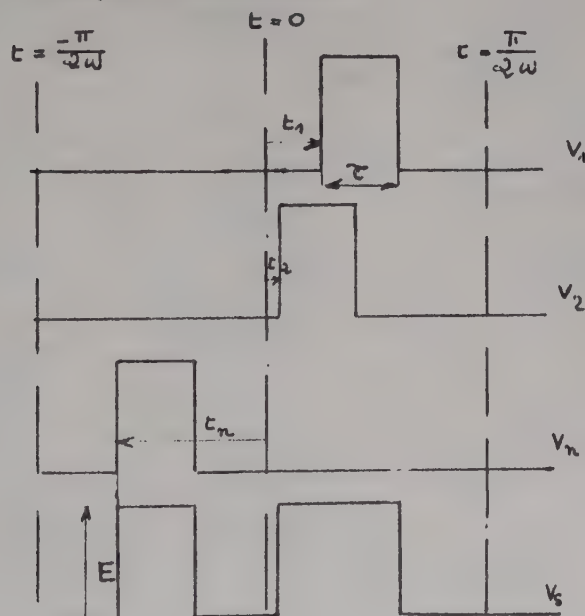
PAR UN SYSTEME A SIX DEGRES DE LIBERTE

- Préliminaire -

Les expériences effectuées sur la poutre large encastrée ont mis en lumière la nécessité de sommer les déphasages relatifs des capteurs. Il nous est, en effet, apparu que cette opération entraînerait un gain de temps très appréciable dans l'optimisation du vecteur excitation, le procédé d'exploration cyclique de chaque voie prenant déjà un certain temps, même pour un système à quatre variables.

CHAPITRE I - DESCRIPTION DU SOMMATEUR DE DEPHASAGES

1 - Principe de fonctionnement



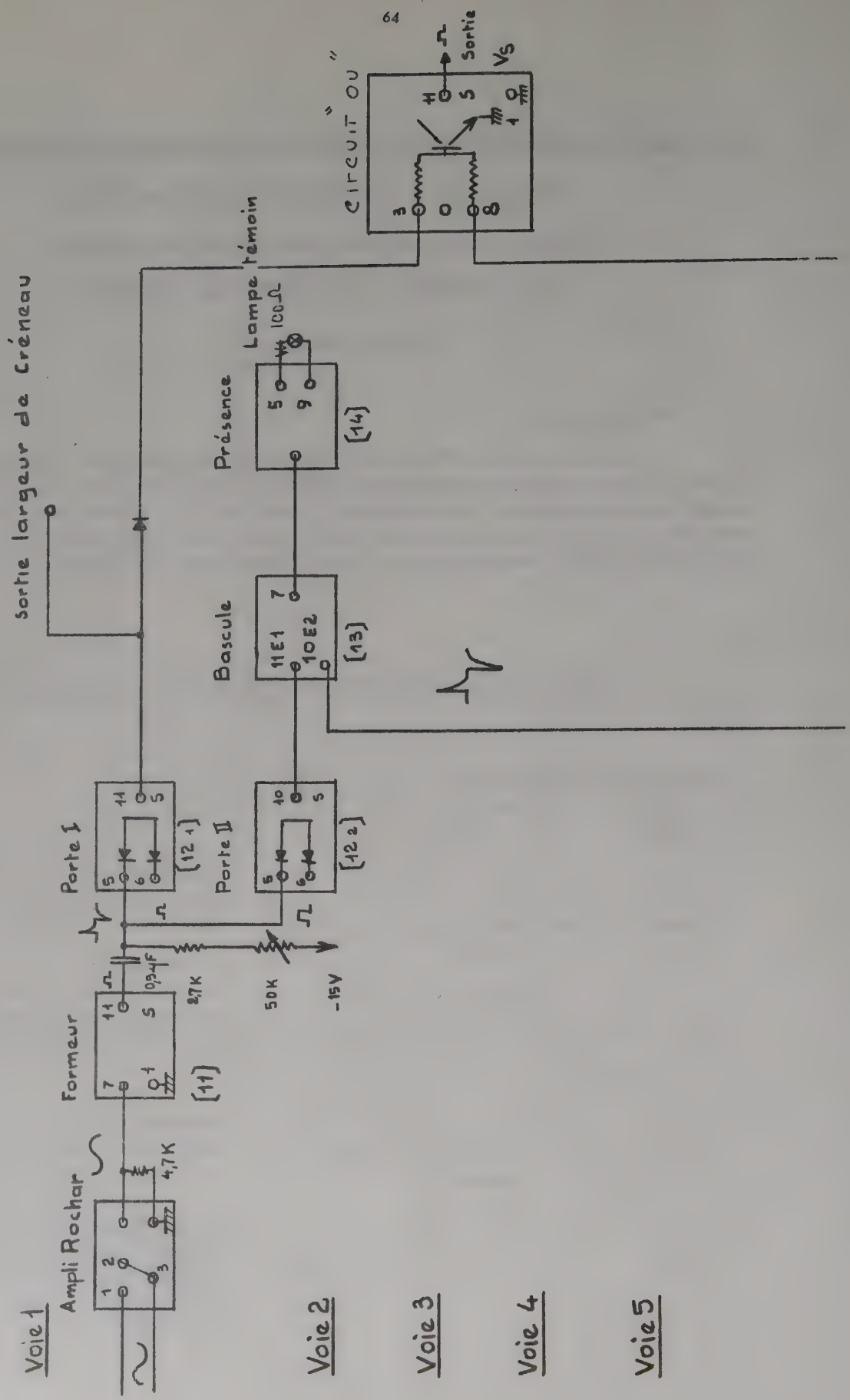
Considérons un ensemble de n tensions sinusoïdales de période T , déphasées entre elles d'un angle que nous supposons d'abord inférieur en valeur absolue à $\frac{\pi}{2}$

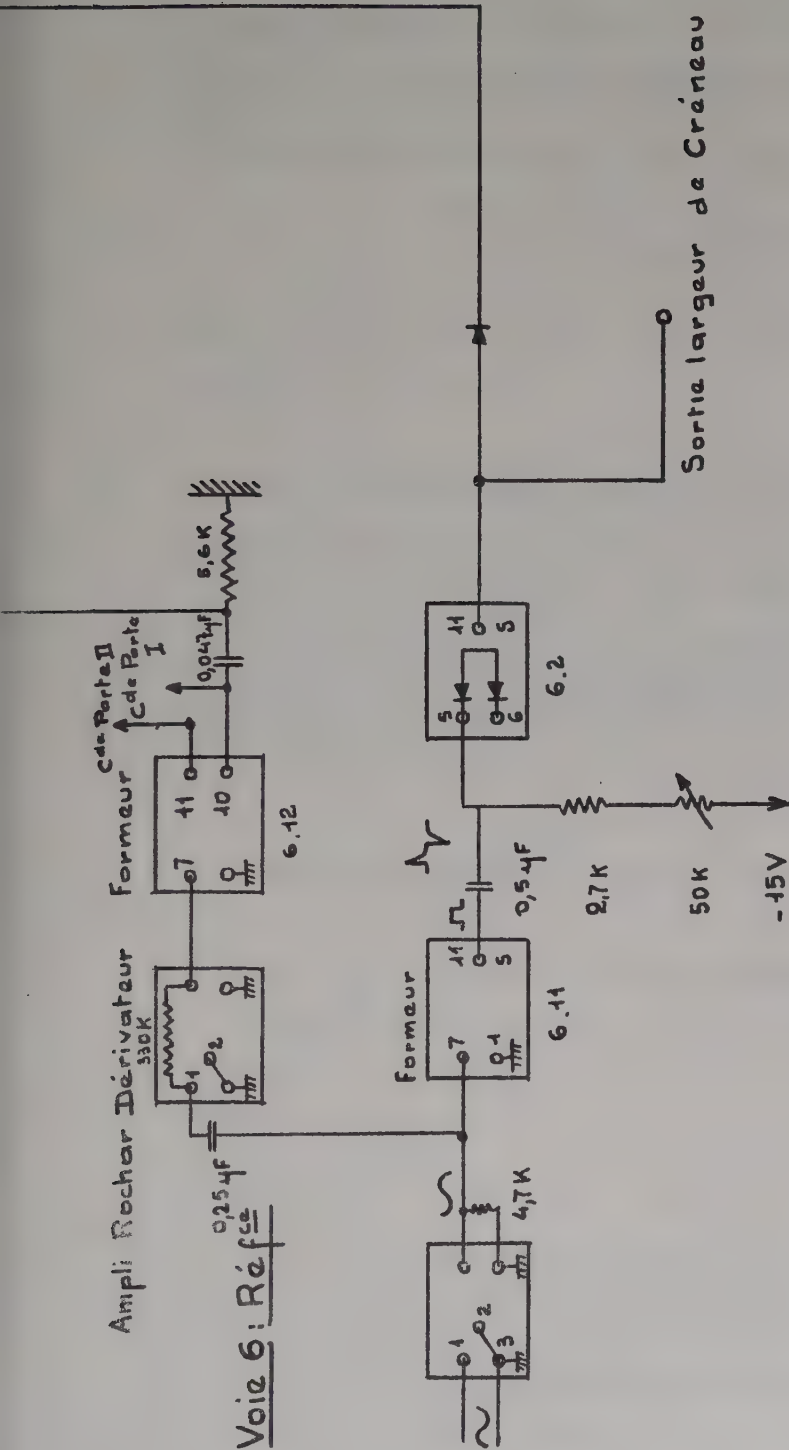
et faisons correspondre à ces tensions n tensions créneaux v_i de largeur τ , identiques mais échelonnées dans le temps à des intervalles proportionnels aux déphasages : $t_i = \frac{\phi_i}{\omega_i}$.

Considérons la tension v_s égale à E , chaque fois qu'une des tensions v_i est non nulle et nulle partout ailleurs.

La valeur moyenne de cette tension est fonction croissante de l'écart maximum de phase entre toutes les tensions et indépendante de l'amplitude des entrées : Tel est le principe du circuit de sommation de déphasages

Schéma de câblage du Sommateur de Phase





p: numéro de la voie
 q: numéro dans la voie
 r: numéro dans la sous voie (porte II)

Numérotation des circuits

Lampe témoin : Type "Midget" 527 à filament Russeberger
 Color light Modèle 8565, 1,1W, 12-14V

Si $\tau \neq \frac{T}{2n}$, la configuration de la tension v_s est un créneau de largeur $\frac{T}{2n}$ et celle qui donnera une valeur maxima à $v_{s\text{moy}}$, un créneau de largeur $\frac{T}{2}$.

En fait, dès que le déphasage entre deux sorties X_p et X_q dépasse $\frac{\pi}{2}$, nous posons que X_p et X_q sont de signe contraire ; le circuit comprend en plus un dispositif de lever de doute de la phase . De plus, la mesure de la composante continue de v_s , nécessitant une intégration, nous avons choisi de mesurer $v_{s\text{eff}}$, fonction croissante de l'écart de phase, à condition de prendre τ suffisamment petit devant $\frac{T}{n}$.

v_s étant connu, la recherche des vecteurs F reviendra à minimiser v_s par une action convenable sur les F_i afin d'avoir

$$v_{s\text{eff}} = v_{i\text{eff}}$$

2 - Schéma fonctionnel .

La tension issue de chaque capteur est amplifiée et formée (Discriminateur) pour donner naissance à une tension créneau de largeur $\frac{T}{2}$. Cette tension est différenciée. Les impulsions négatives fournies sont sans effet sur les circuits qui suivent; les impulsions positives traversent des circuits portes (circuits et) commandés par une voie de référence . Si le déphasage du capteur, par rapport à la voie de référence, est inférieur en valeur absolue à $\frac{\pi}{2}$, l'impulsion donne naissance à un créneau de largeur τ , réglage envoyé dans un circuit ou . Sinon, elle commande un relais électronique (Bascule) dont la remise à zéro est effectuée par la voie de référence . La bascule à travers un circuit le puissance (Présence) allume une lampe témoin.

La sortie du circuit « ou » constitue la tension v_s et est envoyée dans un voltmètre alternatif.

La voie de référence ne comporte évidemment qu'une « porte » .

Le schéma fonctionnel, en même temps schéma de câblage de l'appareil, est donné dans les pages précédentes .

3 - Réalisation à l'aide de circuits logiques .

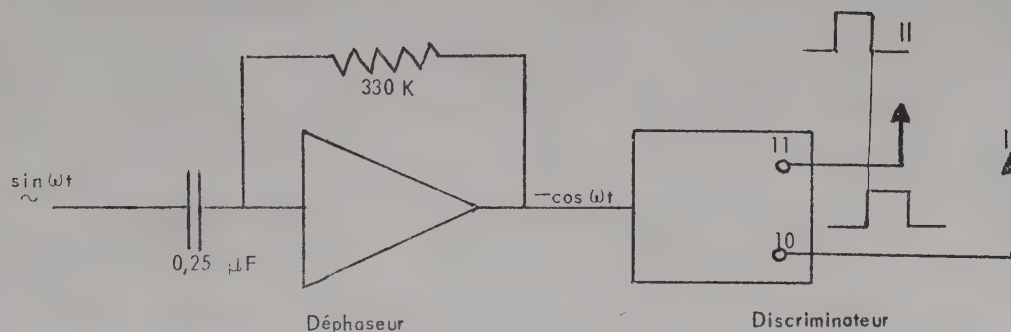
Nous avons réalisé le sommateur de déphasages en utilisant un certain nombre de circuits logiques fournis par les Etablissements BRISSONNEAU et LOTZ (Nantes Bel Air , Département Électronique) et sur lesquels nous avons apporté des modifications. Les schémas des plaquettes sont groupés en annexe en fin de chapitre . Nous allons ci-dessous décrire le fonctionnement de chaque sous-ensemble. On aura intérêt à se reporter fréquemment en fin de paragraphe 3 , où nous avons donné un tableau récapitulatif de l'évolution des tensions en différents points du circuit .

3.1 Discriminateur d'amplitude

Le signal issu du capteur, amplifié, est envoyé entre les bornes d'entrée 1 et 7 et donne naissance, à la sortie 11, à une tension en créneaux nulle pour l'alternance positive du signal d'entrée, c'est-à-dire l'alternance négative du signal d'entrée des amplificateurs qui possèdent un déphasage interne de π .

3.2 Voie pilote - Commandes de référence .

La voie pilote est la voie qui fournit les commandes de référence. La sortie du $n^{\text{ième}}$ amplificateur continu débite dans un circuit dérivateur dont la fonction de transfert est $-pCR$. Une entrée en $\sin \omega t$ est transformée en $-\cos \omega t$, à une constante multiplicative positive près, pour une pulsation donnée. Cette tension attaque un discriminateur dont la sortie 10 commande toutes les portes I et la sortie 11, complémentaire de la précédente, toutes les portes II .



En somme, toutes les entrées 6 des circuits portes I sont portées à un potentiel positif un quart de période avant et un quart de période après le signal normal de la voie pilote, et nulles partout ailleurs et inversement pour les portes II .

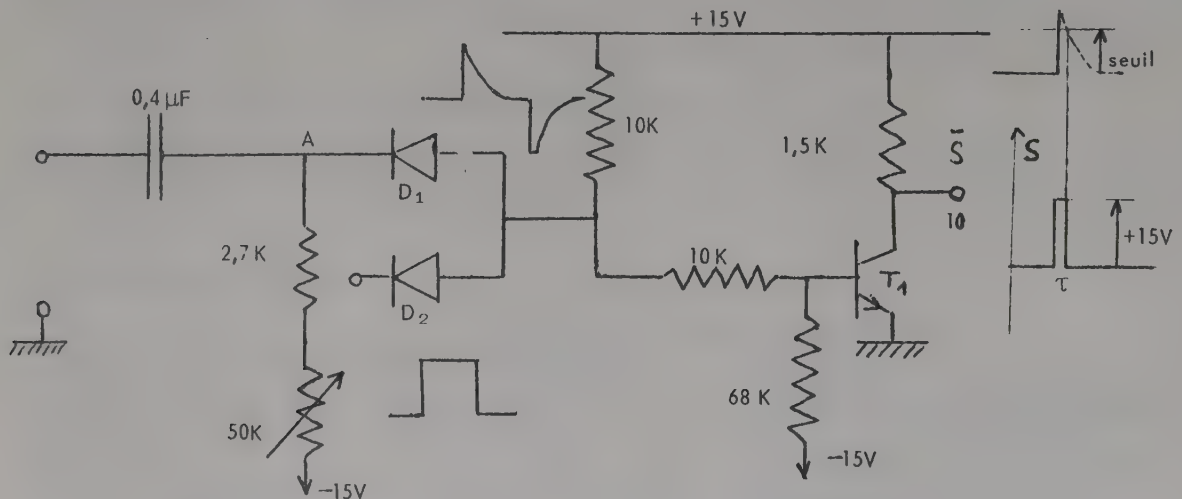
Des impulsions, obtenues à partir de la sortie 10 du formeur, différenciée, commandent toutes les entrées 10 E2 des Bascules.

3.3 Circuits « portes » (et)

Les créneaux issus des discriminateurs sont différenciés et attaquent les entrées 5 des circuits « et ».

Le transistor T_1 , initialement bloqué, devient passant si sa base est portée à un potentiel positif, ce qui ne peut arriver que si D_1 et D_2 sont bloqués en même temps.

Le circuit porte I transmet donc une information si l'impulsion positive de commande de D_1 n'est pas déphasée d'une quantité supérieure à $\pm \frac{\pi}{2}$ par rapport à la voie de référence ; sinon c'est le circuit porte II.



Afin d'avoir un front descendant de l'impulsion τ , très franc, nous avons fait en sorte que l'impulsion positive n'agisse que lorsqu'elle dépasse un seuil. Pour cette raison, un potentiomètre de 50 K permet de régler à la fois le potentiel de A, c'est-à-dire la polarisation négative de la base et la constante de temps du circuit différentiateur. Toutes les bornes 11 sont sorties et permettent de vérifier le réglage du potentiomètre (choix de τ).

3.4 Circuit lever de doute

La bascule est commandée en permanence par des impulsions envoyées sur l'électrode E2 - 10. Les impulsions positives sont sans effet.

Les fronts descendants des impulsions figent le système dans l'état suivant : T_1 et T_4 conducteurs, T_2 et T_3 bloqués, si E_1 ne reçoit aucun front descendant.

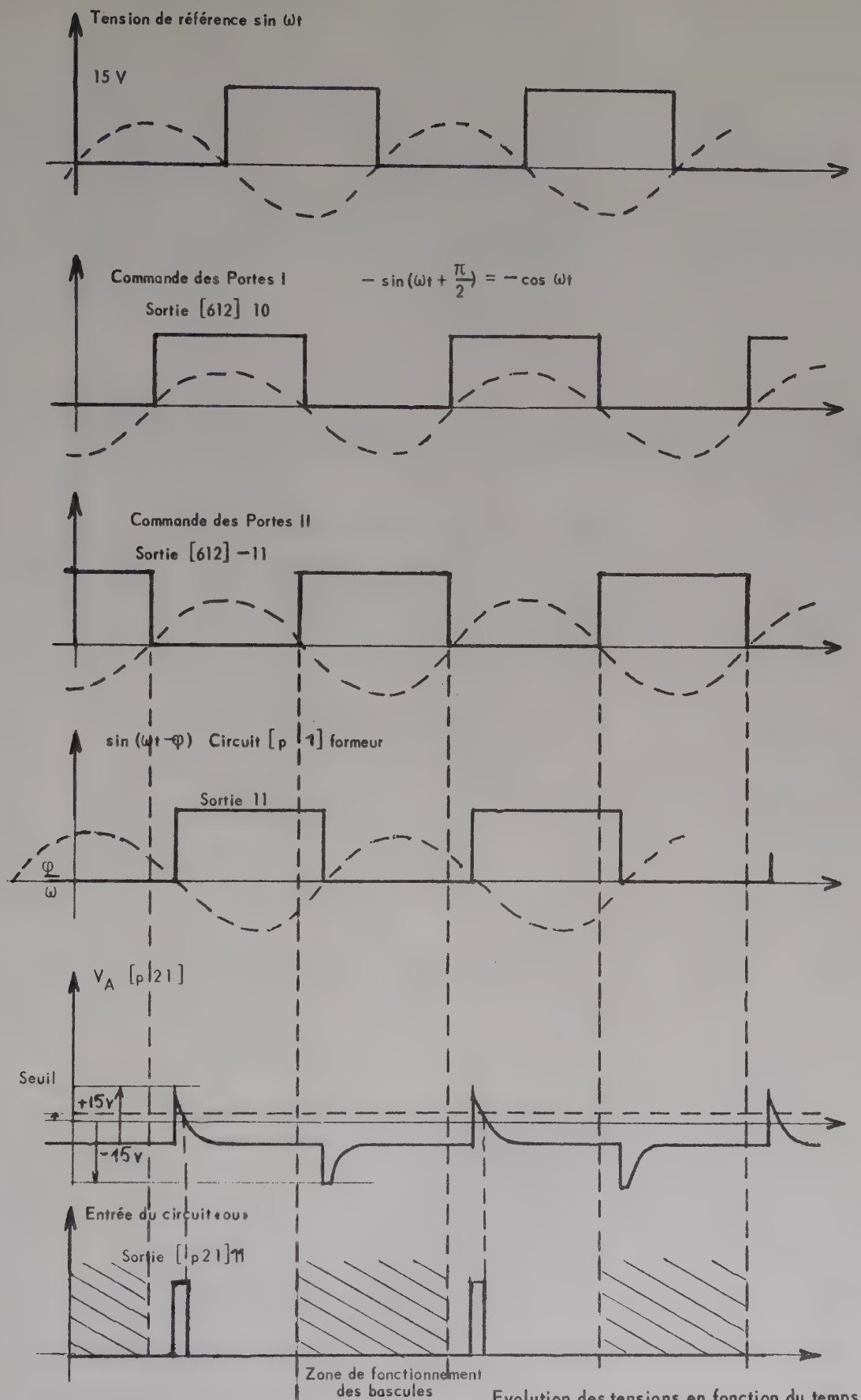
Donc S_1 - 7 est en général à la masse.

Si E_1 reçoit des impulsions négatives, les états se permutent, le front descendant de la commande E_2 rétablit l'état initial, etc...

Chaque fois que E_1 est commandé, la bascule délivre des créneaux sur S_1 . Ceux-ci traversent un circuit de puissance ayant une lampe dans son circuit de sortie. La lampe clignote chaque fois que le capteur a un déphasage supérieur à $\pm \frac{\pi}{2}$, une inversion manuelle des bornes du capteur éteint la lampe en obligeant les impulsions à suivre la voie normale : Porte I, circuit ou.

3.5 Circuit ou

Le circuit de sommation est classique. Des diodes sont insérées entre les sorties des portes I et les entrées du circuit ou, afin d'isoler les différentes voies.

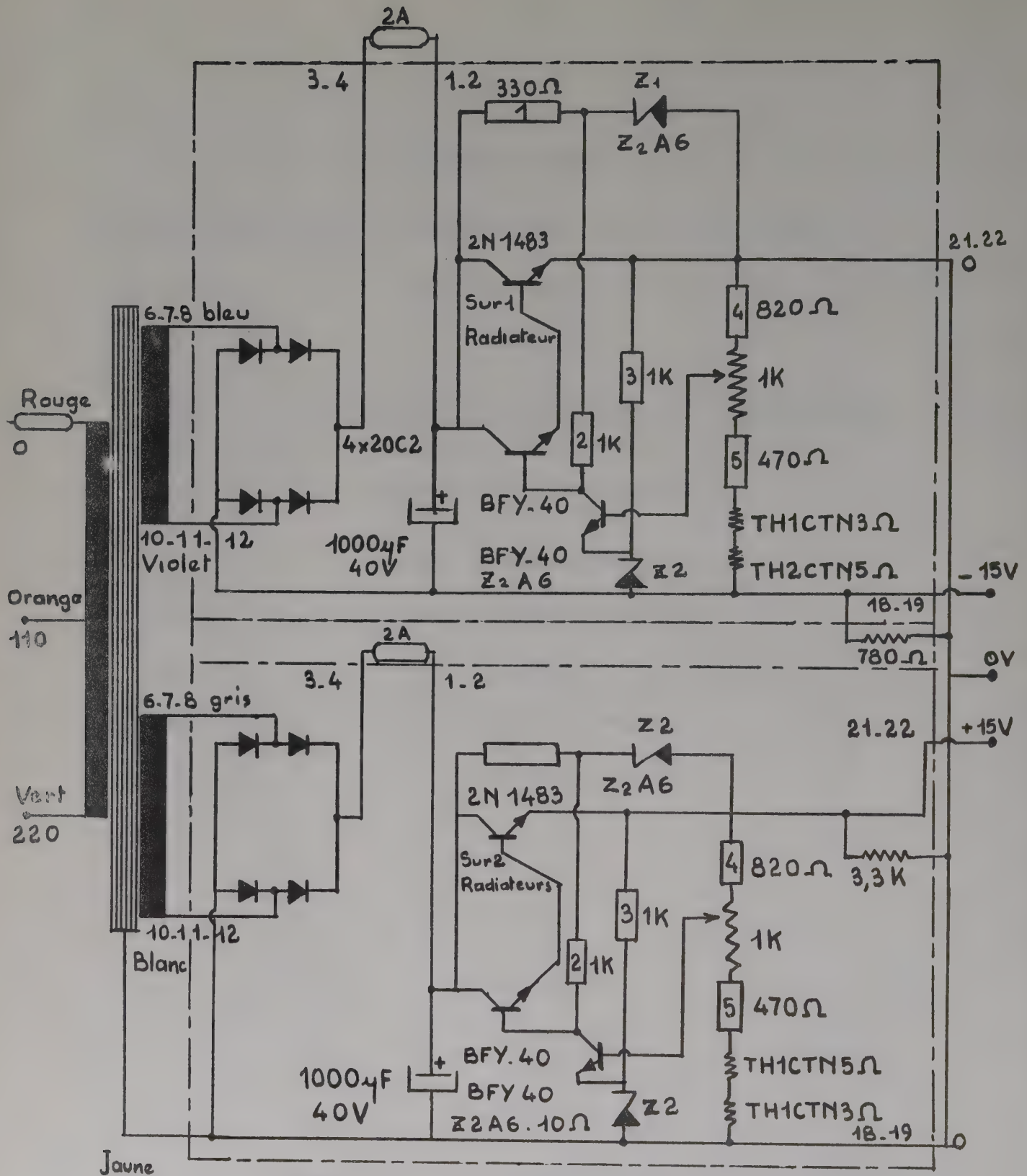


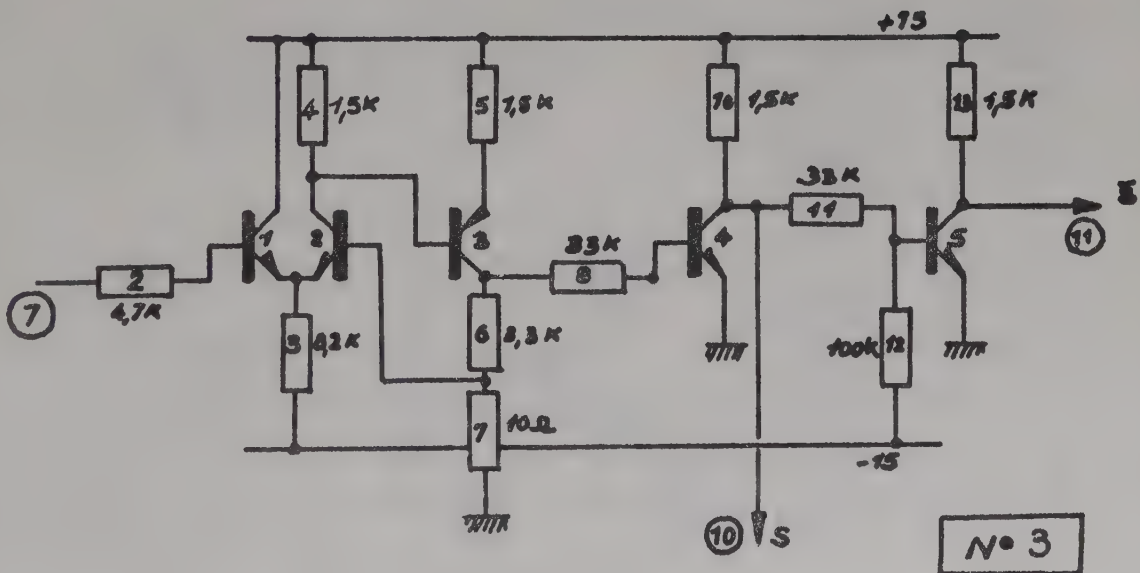
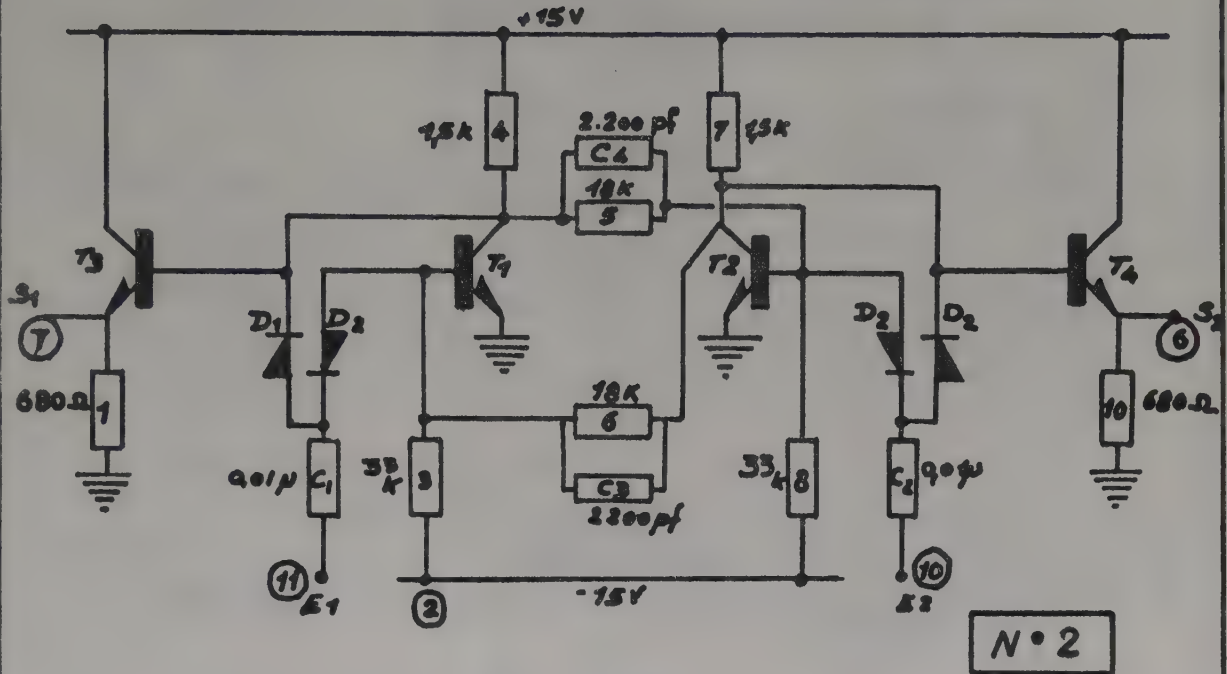
Evolution des tensions en fonction du temps en différents points du circuit.

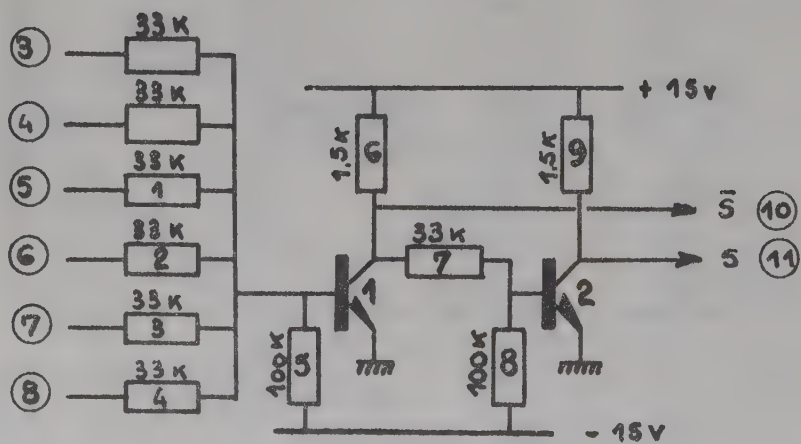
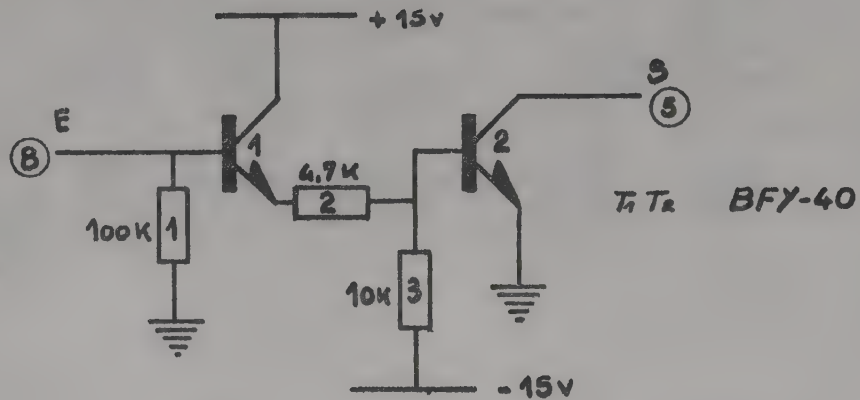
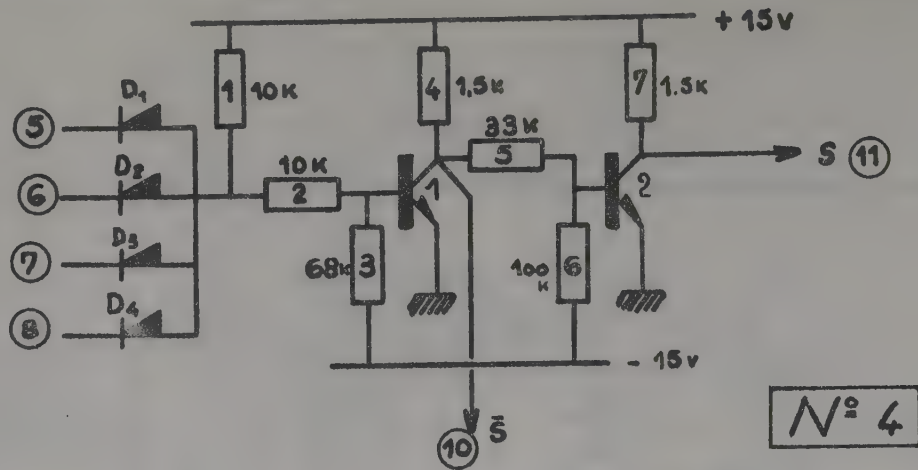
ANNEXE AU CHAPITRE I

SCHEMA DE CABLAGE DES CIRCUITS IMPRIMES DU SOMMATEUR DE DEPHASAGES

Numéros de référence des circuits transformés	Noms et numéros des circuits fournis par les Etablissements BRISSONEAU & LOTZ -NANTES	Date du Plan
1	Alimentation stabilisée ± 15 V n° 730203 A 741015	9 - 65
2	Bascule basse impédance n° 741038 Z	11-65
3	Discriminateur d'amplitude n° 741028 Z	11-65
4	Circuit et n° 741029 Z	11-65
5	Circuit présence n° 741032 Z	11-65
6	Circuit ou n° 741030 Z	11-65







① Масса. ② -15v ③ +15v

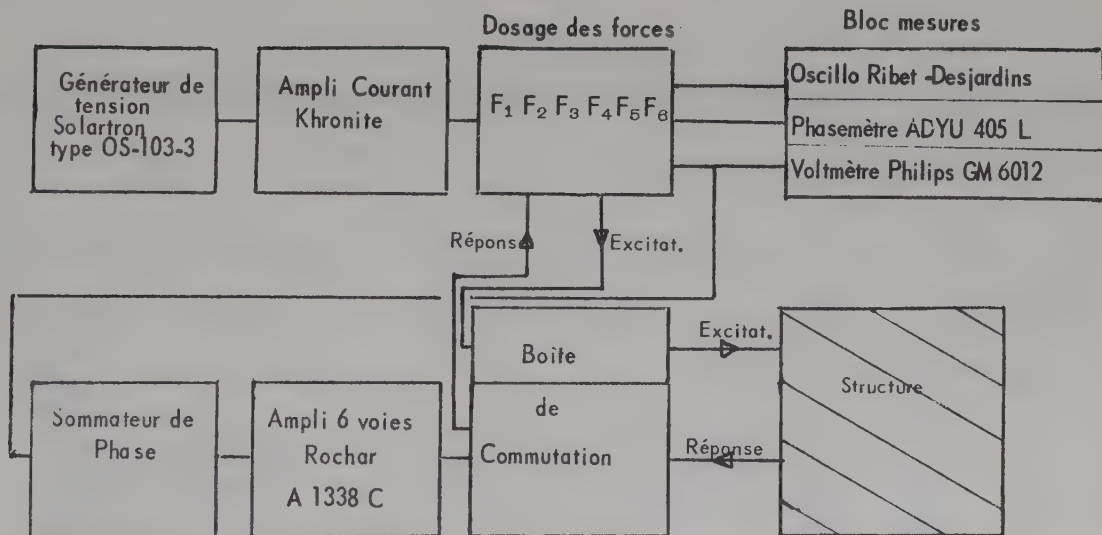
CHAPITRE II - DETERMINATION DES MATRICES DE COUPLAGE D'UNE PLAQUE TRIANGULAIRE

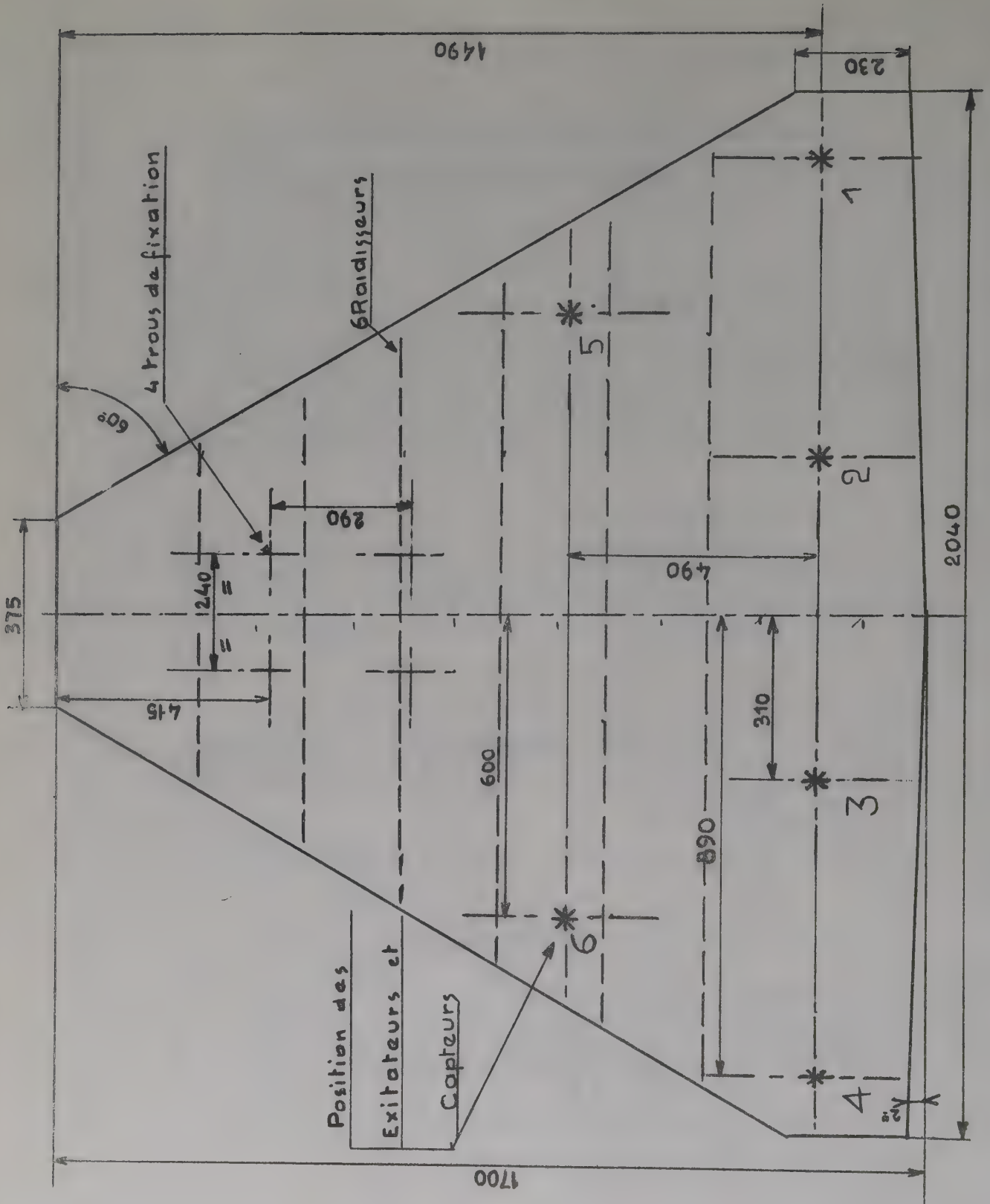
1- Description du système étudié .

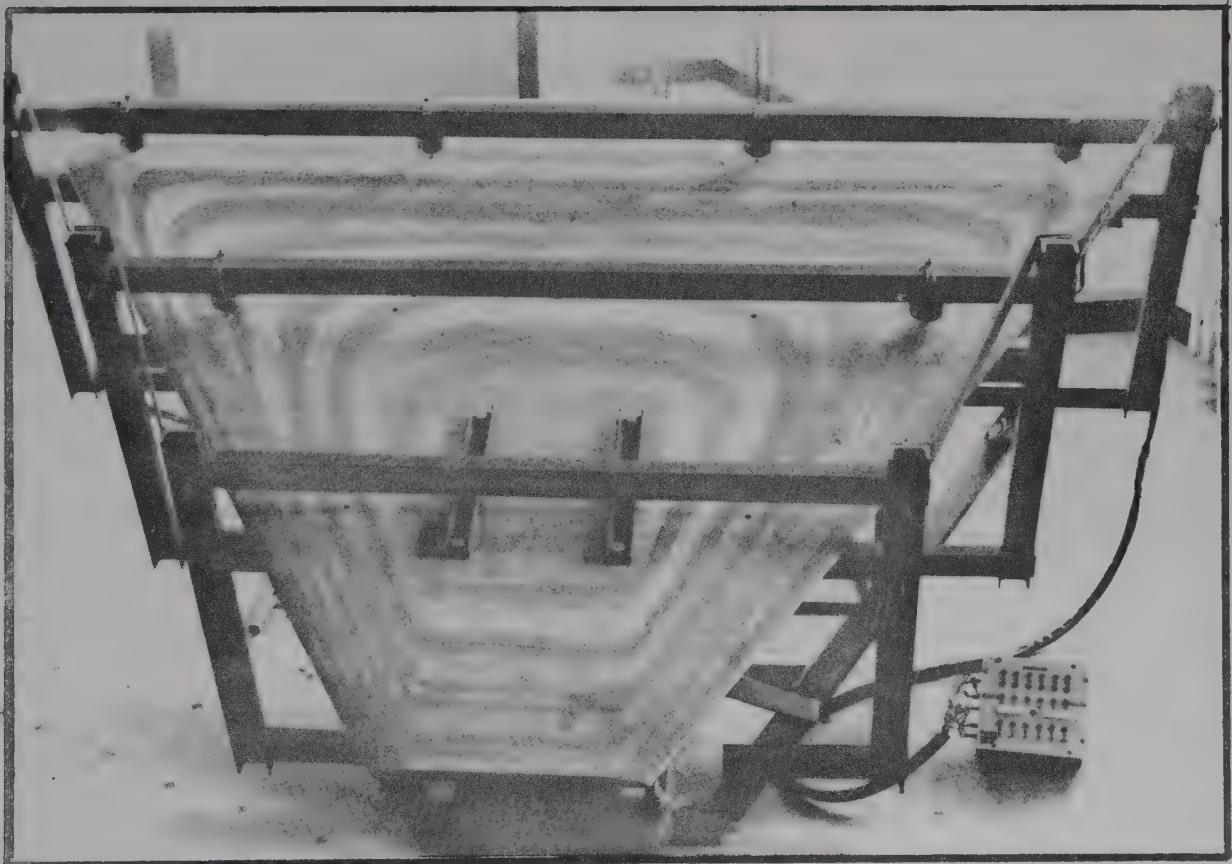
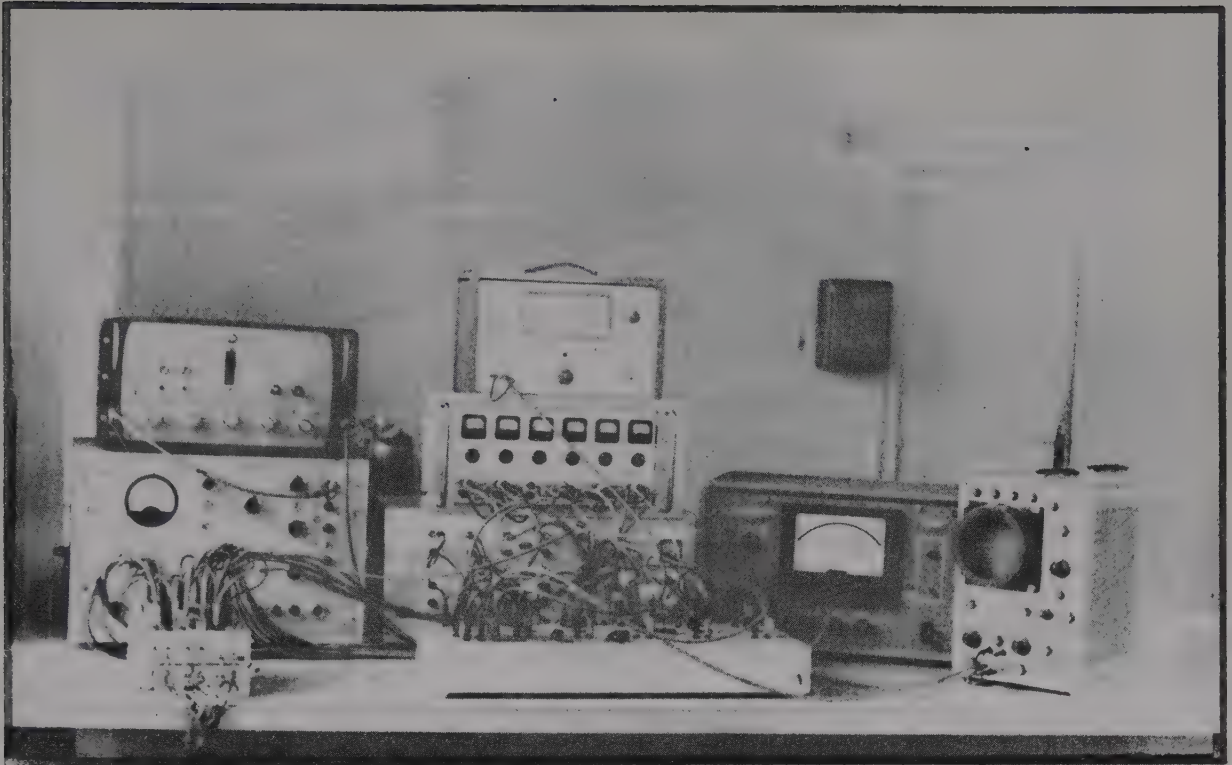
Nous nous proposons ici d'étudier les caractéristiques d'une aile Δ : fréquences propres, formes propres, matrices de couplage . L'aile est une maquette en forme d'aile de Mirage III AOI à l'échelle 1/10 réalisée à l'E.N.S.M. à l'aide de plaques de contreplaqué superposées liées par collage. L'aile est fixée au voisinage de son nez sur un socle en fonte . Nous assimilons la plaque à un système couplé $\{6,6\}$, six bobines d'excitation et six capteurs y sont fixés conformément au plan ci-joint .

2- Schéma fonctionnel de l'ensemble

Les circuits d'excitation sont les mêmes que ceux décrits dans la deuxième partie § 1 , chapitre II-2. Le dispositif de mesure sur les sorties des capteurs contient le sommateur de phase . Une boîte de commutation permet de diriger les tensions de sortie, soit vers le sommateur, soit vers les appareils de mesure Phasemètre - Oscillo - Voltmètre . L'ensemble peut être schématisé ainsi :







3 - Résultats expérimentaux .

3.1 Séquence de mesures à effectuer

Un balayage en fréquence en un point ayant permis de détecter grossièrement les fréquences de résonance de la structure et d'éliminer celles dues au bâti, les mesures s'effectuent en deux temps :

- après avoir fait choix d'une gamme étroite de fréquence contenant une fréquence de résonance, nous excitons la structure et réglons les potentiomètres de 50 K pour avoir sur les sorties crêteaux des temps τ de l'ordre de $\frac{1}{20}$.

- la recherche du vecteur force optimum est alors possible (des considérations de symétrie sont souvent d'une grande utilité) .

Lorsqu'aucune diminution de la tension v_s n'est observée pour une variation faible des F_i , le vecteur force est optimum . Les sorties sont commutées sur le bloc « Mesures » .

3.2 Tableau des mesures

La structure étant très faiblement amortie et les bandes de fréquences utilisées étant très étroites, les vecteurs forces choisis dans chaque gamme n'ont pas été retouchés pour chaque mesure .

Les vecteurs vitesses X et forces Φ étant obtenus en volts, nous les calculons en mètres et Newton , respectivement, par les transformations suivantes

$$X = \delta X' \Omega^{-1}$$

$$F = \alpha \Phi$$

où Ω est la matrice spectrale .

δ est la matrice de sensibilité des capteurs

α est la matrice de sensibilité des excitateurs

$$\alpha = 10^{-2} \text{ diag. } \{ 7,64 ; 7,98 ; 7,89 ; 6,52 ; 7,2 ; 8,8 \}$$

$$\delta = 10^{-2} 2 \pi \text{ diag. } \{ 1,915 ; 1,965 ; 2,19 ; 2,12 ; 2,25 ; 1,84 \}$$

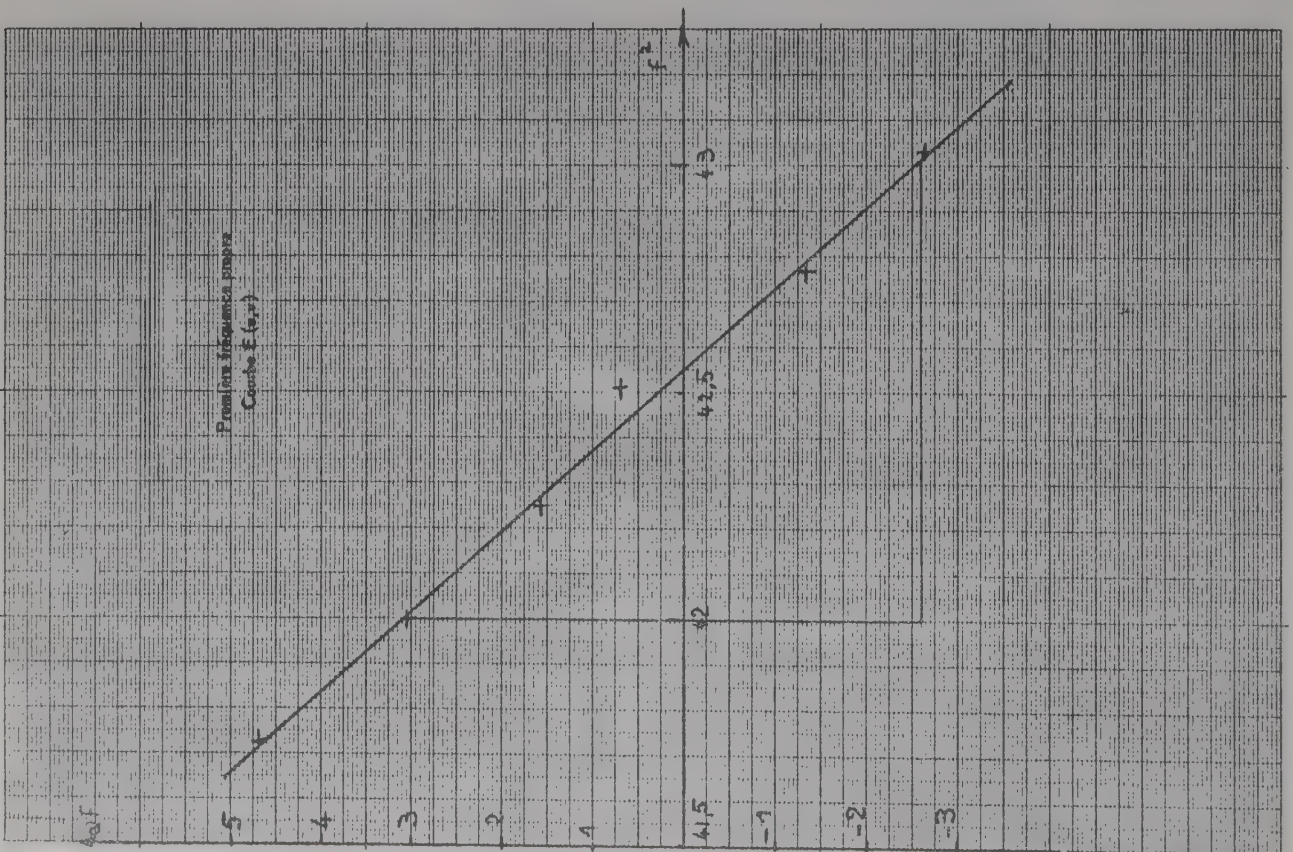
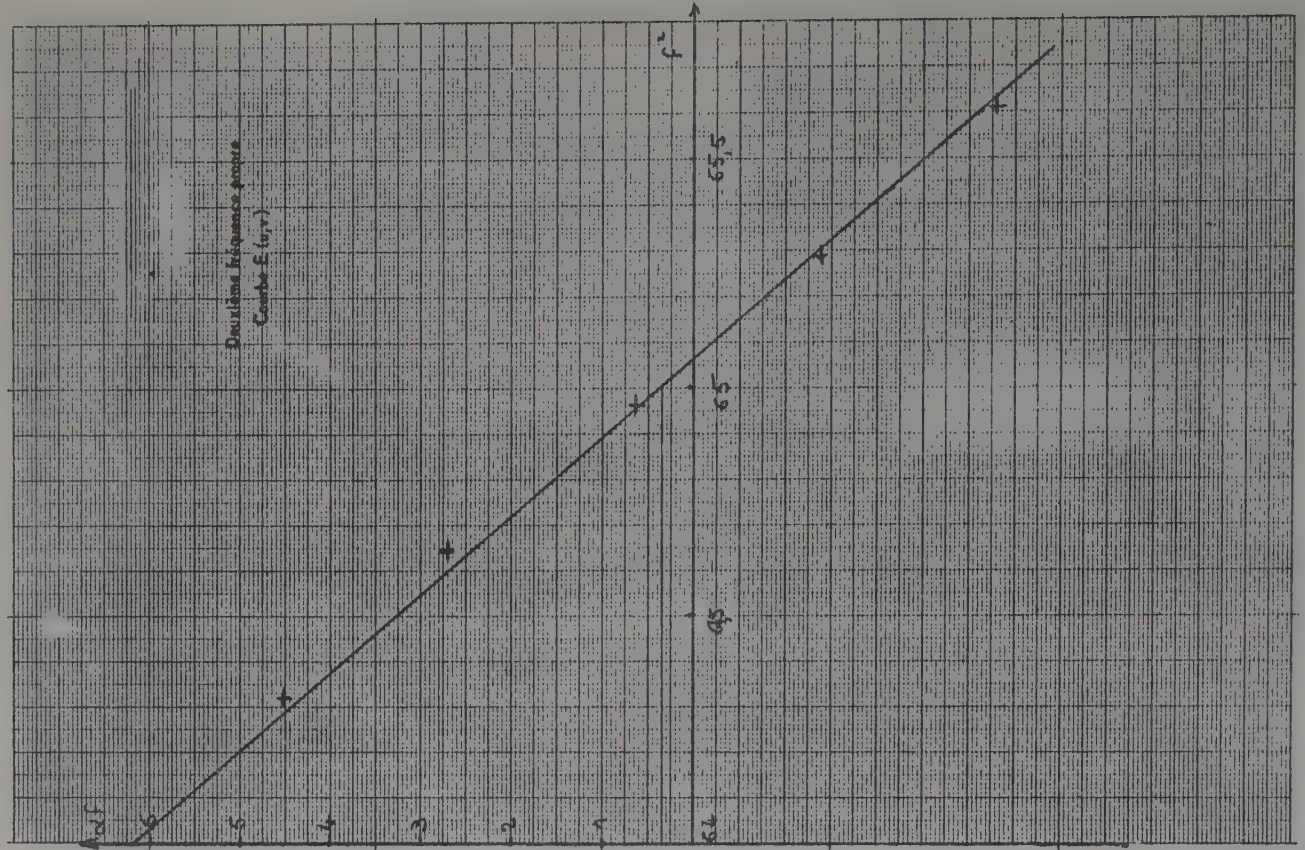
Ces matrices ont été déterminées par des essais effectués directement sur la structure .

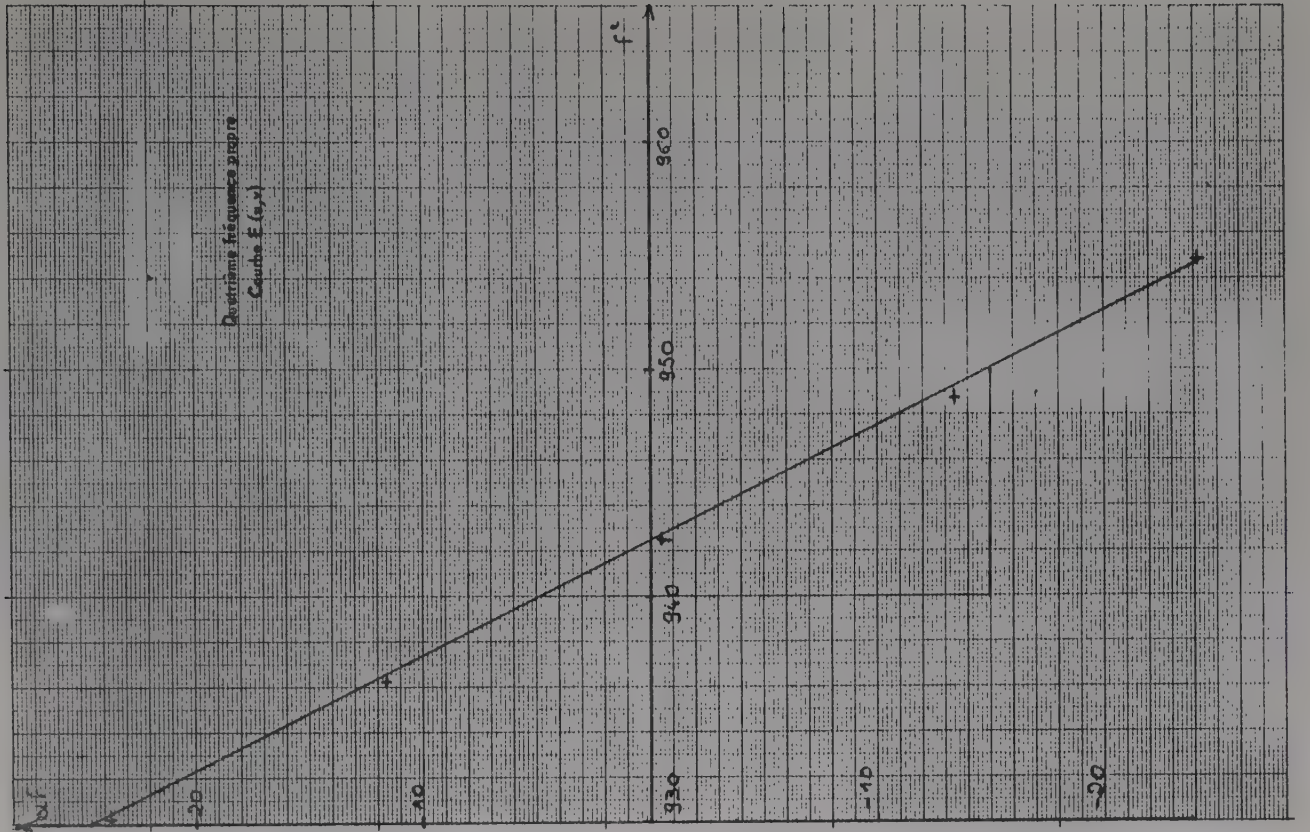
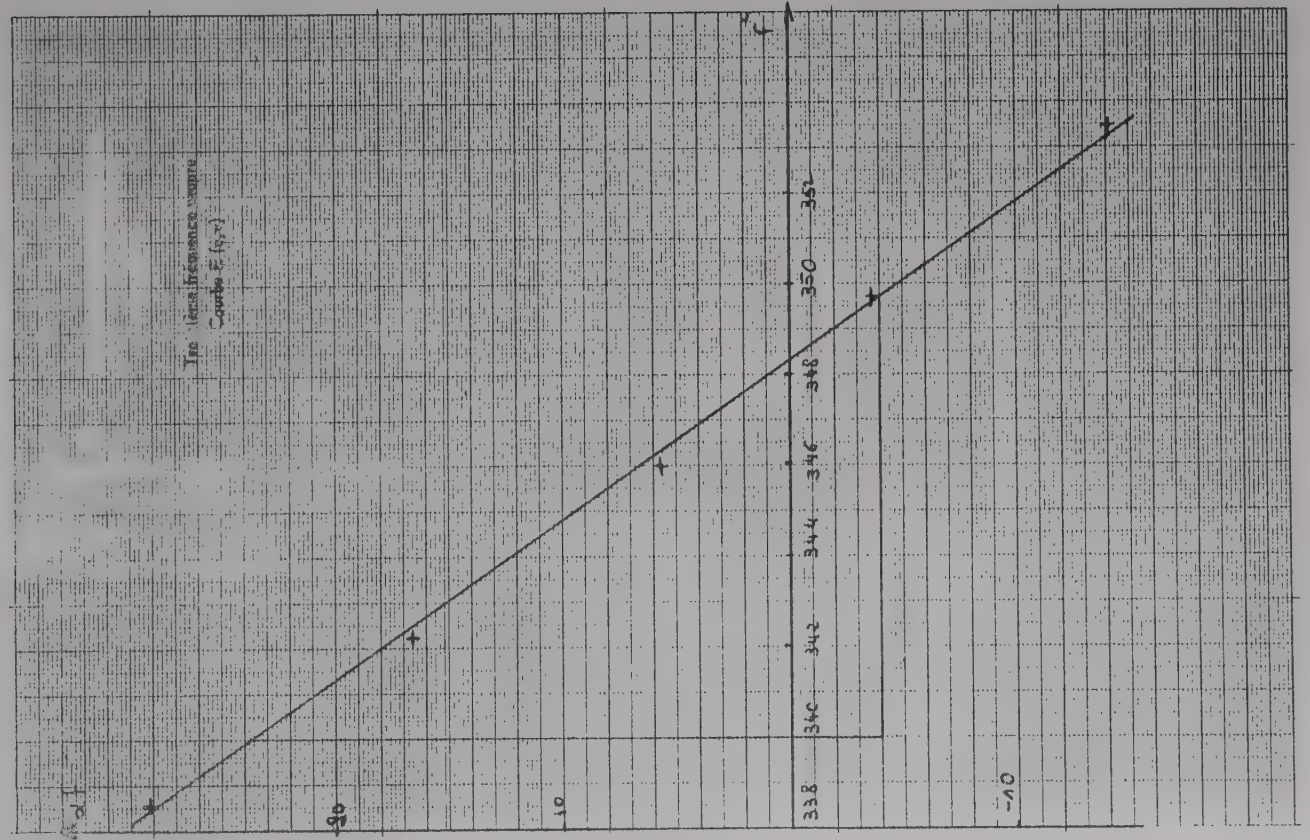
Les résultats des mesures sont résumés dans le tableau suivant .

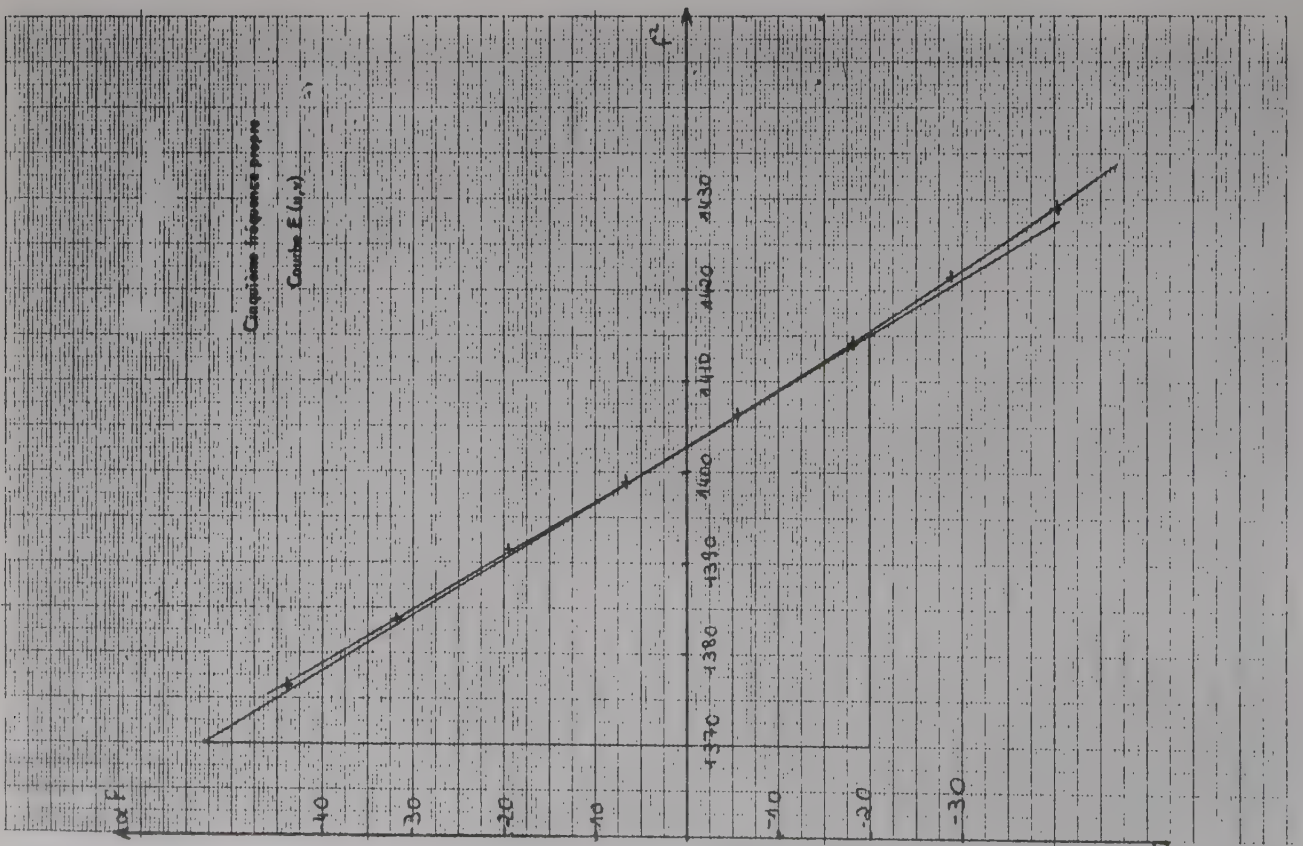
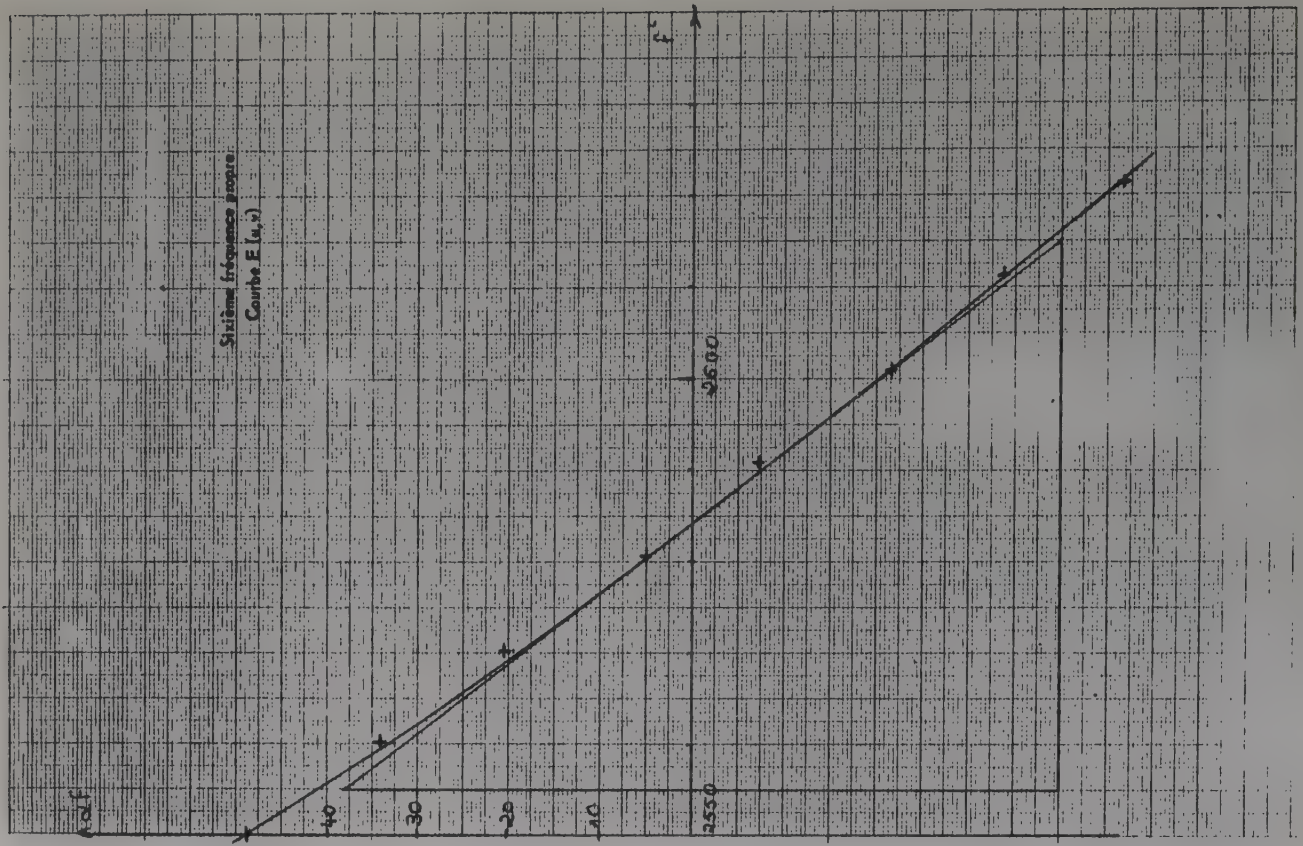
Nous avons cru bon de relever à chaque fréquence propre les lignes nodales afin de visualiser les déformées .

Tableau des mesures effectuées sur la structure

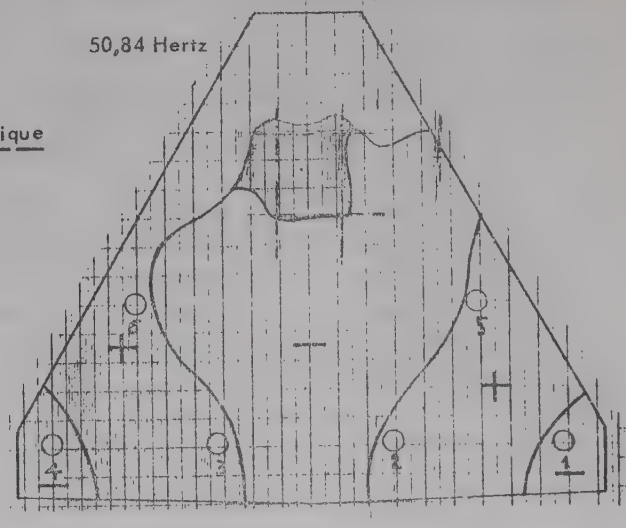
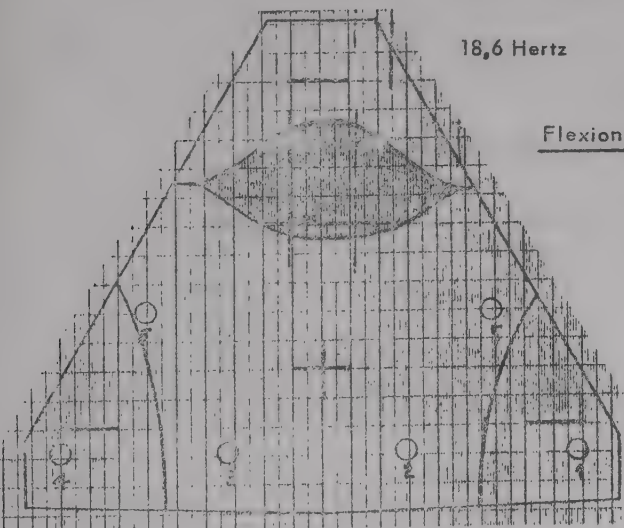
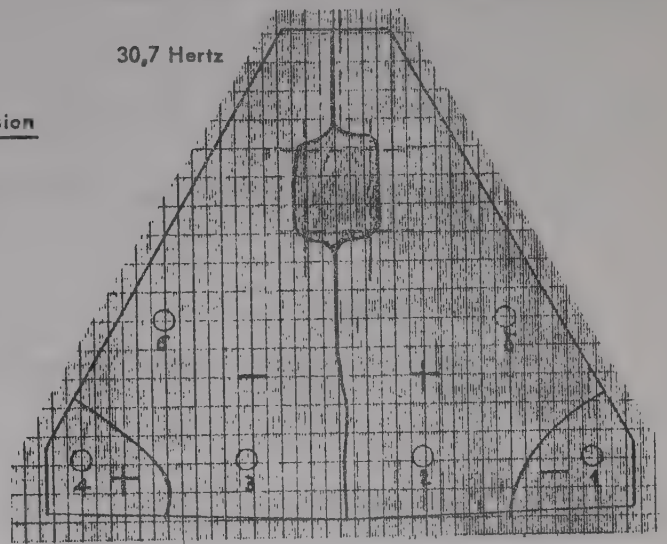
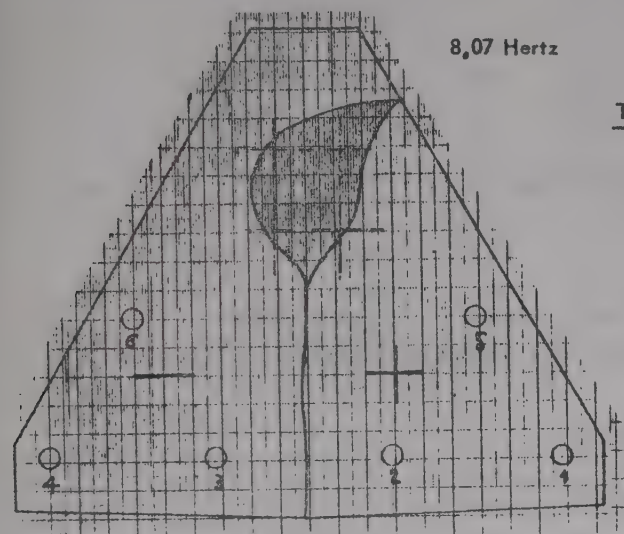
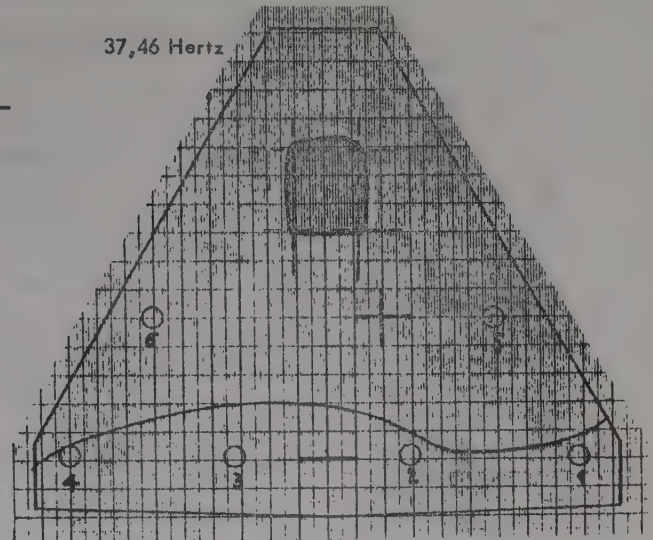
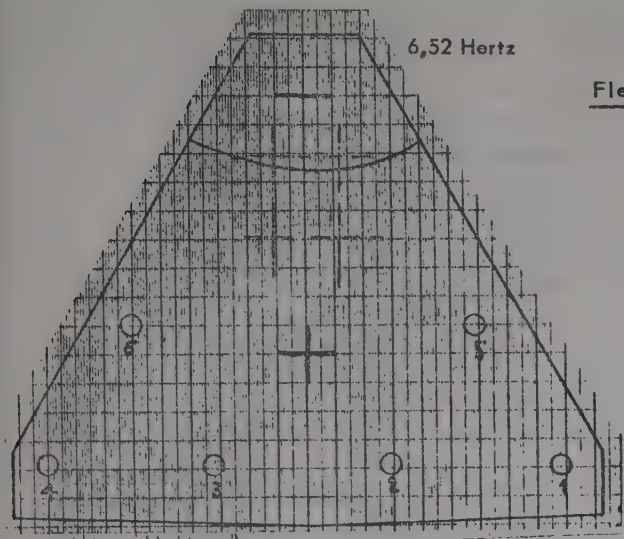
	f Hertz	$-(\varphi + \frac{f}{2})$	αf	f^2	$ \Delta\varphi _{\max}$	Φ volts	X' volts
1	6,46	36°	4,6934	41,73	2°30'	0,530	0,420
	6,48	25°	3,0217	41,99		0,385	0,340
	6,50	13°30	1,5605	42,25		0,630	0,360
	6,52	6°	0,6852	42,51		0,565	0,450
	6,54	-11°30	-1,3306	42,77		0,430	0,150
	6,56	-22°	-2,6504	43,03		0,435	0,170
2	8	37°	6,0284	64	30'	0,310	0,375
	8,02	29°30	4,5375	64,32		0,180	0,130
	8,04	18°30	2,6902	64,64		-0,190	-0,120
	8,06	4°30	0,6343	64,96		-0,3	-0,335
	8,08	-9°30	-1,3521	65,28		0,175	0,130
	8,1	-22°	-3,2726	65,61		-0,185	-0,120
3	18,4	57°	28,3334	338,56	40'	0,950	0,650
	18,5	42°	16,6574	342,25		-0,710	-0,315
	18,6	17°	5,6865	345,96		-0,830	-0,285
	18,7	-11°	-3,6350	349,69		1,06	0,620
	18,8	-37°	-14,1667	353,44		0	0
						0	0
4	30,5	38°	23,829	930,25	3°	0,420	0,310
	30,6	21°	11,7461	936,36		-0,420	-0,160
	30,7	-1°	-0,5360	942,49		0,420	0,170
	30,8	-23°30	-13,392	948,64		-0,415	-0,320
	30,9	-38°	-24,142	954,81		-1,120	-0,225
						1,22	0,210
5	37,1	49°30	43,438	1376,41	4°	0	0,034
	37,2	40°30	31,772	1383,84		0,950	0,022
	37,3	27°30	19,417	1391,29		1,300	0,079
	37,4	10°	6,595	1398,76		0	0,023
	37,5	-9°	-5,939	1406,25		0	-0,06
	37,6	-26°	-18,338	1413,76		0	-0,122
	37,7	-37°30	-28,928	1421,29			
	37,8	-47°	-40,535	1428,84			
6	50,5	44°	48,767	2550,25	5°	1,665	0,130
	50,6	34°	34,130	2560,36		-1,430	-0,074
	50,7	22°	30,484	2570,49		-1,17	-0,107
	50,8	5°30	4,891	2580,64		+1,58	0,153
	50,9	-8°20	-7,456	2590,81		-0,0128	-0,0058
	51	-23°	-21,648	2601,00		-0,050	-0,00207
	51,1	-33°30	-33,822	2611,21			
	51,2	-42°	-46,916	2621,44			







FORMES PROPRES - LIGNES NODALES (relevées au capteur vitesse PRODERA -Type 20M-12A)



Matrices des modes et des forces normalisées .

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \text{Newton} & \begin{bmatrix} 32,823 & 74,773 & -217,101 & -145,208 & 0 & -16982 \\ 24,904 & 45,349 & 169,475 & 151,670 & -2103,6 & 15234 \\ 40,292 & -47,329 & 195,885 & -149,959 & -2846,1 & 12323,8 \\ 29,861 & -61,753 & -206,728 & 122,183 & 0 & -113752,6 \\ 25,096 & 39,780 & 0 & 364,920 & 0 & 122,82 \\ 31,030 & -51,398 & 0 & -485,836 & 0 & 587,4 \end{bmatrix} \\ \mathcal{Z} = \text{mètres} & \begin{bmatrix} 1 & 2,811 & -1,994 & -0,875 & -0,4823 & -6,537 \\ 0,831 & 1 & 0,992 & +0,463 & -0,3202 & 3,818 \\ 0,980 & -1,029 & 1 & -0,549 & -1,2815 & 6,153 \\ 1,186 & -2,780 & -2,106 & 1 & -0,3612 & -8,517 \\ 0,420 & 1,145 & 0 & 0,746 & 1 & 0,343 \\ 0,389 & -0,864 & 0 & -0,570 & 1,663 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pente des courbes $E(u, v) = 0$

$$\frac{u}{\beta} = \{ 0,907 ; 0,920 ; 0,441 ; 0,315 ; 0,258 ; 0,208 \}$$

Fréquences propres

Nous avons relevé sur les courbes les carrés des fréquences propres

$$\{^2 = \{ 42,55 ; 65,07 ; 348,3 ; 942,4 ; 1403 ; 2584 \}$$

Nous en déduisons les fréquences propres soit Ω

$$\Omega = 2\pi \{ 6,52 ; 8,07 ; 18,67 ; 30,7 ; 37,46 ; 50,84 \} \text{ rd/s}$$

3,3 Exploitation des résultats

Le calcul de $\beta = \tilde{\mathcal{Z}} \mathcal{F} \Omega^{-1}$ a mis en évidence une forte dissymétrie

$$\beta = \text{N/m/s} \begin{bmatrix} 3,69 & -0,206 & -1,10 & -0,295 & -19,3 & 25,9 \\ -0,131 & 11,2 & 0,573 & 2,05 & 3,57 & 22,9 \\ -0,155 & -0,422 & 10,4 & 0,17 & -21 & 282,1 \\ -2,05 & -0,419 & -0,388 & 4,93 & 2,5 & 3,59 \\ -0,233 & -0,263 & -1,07 & -1,42 & 18,4 & 20 \\ 2,105 & 2,34 & 42,6 & 4,12 & 108,5 & 1134 \end{bmatrix}$$

La dissymétrie des deux dernières lignes et des deux dernières colonnes est anormale. Pour ces deux fréquences, nous avons ausculté la structure au capteur Prodera et avons pu remarquer que, dans certains domaines, il y avait seulement résonance de phase locale. Globalement, la structure ne vibre pas en résonance de phase. Cette résonance n'est vérifiée approximativement qu'au voisinage des excitateurs (l'écart de phase maximum y est déjà important).

Nous nous sommes limité pour le calcul des matrices de couplage à un système d'ordre 4. Les calculs effectués à l'I B M 650 de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique ont donné les résultats suivants :

$$\beta = \begin{bmatrix} 3,13 & -0,141 & -1,10 & -0,110 \\ -0,178 & 9,39 & -0,573 & -2,29 \\ -1,55 & -0,422 & 10,4 & 0,170 \\ -0,231 & -1,58 & -0,388 & 2,08 \end{bmatrix} \quad \text{N/m/s}$$

$$\mu = \text{diag} \{ 2,84 ; 8,63 ; 4,6 ; 0,656 \} \quad \text{Kg}$$

$$\gamma = \text{diag} \{ 4770 ; 22200 ; 64200 ; 24413 \} \quad \text{N/m}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,760 & -0,248 & 0,132 & 0,10 \\ -0,189 & 1,19 & -0,169 & -0,020 \\ -0,045 & 0,020 & 1,22 & -0,155 \\ 0,126 & 0,020 & -0,175 & 0,638 \end{bmatrix} \quad \text{N/m/s}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0,345 & 0,146 & -0,063 & 0,061 \\ 0,146 & 1,20 & -0,064 & -0,060 \\ -0,063 & -0,064 & 0,958 & 0,127 \\ 0,061 & -0,060 & +0,127 & 0,293 \end{bmatrix} \quad \text{Kg}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3170 & -4470 & 1050 & 270 \\ -4470 & 13600 & -6630 & 1130 \\ 1050 & -6630 & 10900 & -3910 \\ 270 & 1130 & -3910 & 2901 \end{bmatrix} \quad \text{N/m}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\beta_{ii}}{2 \mu_{ii} \omega_i} = \text{diag} \{ 0,013 ; 0,0107 ; 0,0096 ; 0,0082 \}$$

4 - Conclusions

Fréquences propres - Formes propres -

Les deux premières fréquences propres assez voisines ont été facilement séparables grâce au faible amortissement (1 %) . Les autres fréquences n'offrent aucune particularité et nous ne nous étendrons pas plus sur le spectre des fréquences .

Les lignes nodales ont été relevées sur la face supérieure de l'aile. Il est curieux de constater qu'à la première fréquence propre, même aux points de serrage, cette surface subit des déformations. Le tracé des lignes nodales permet aussi de déceler la dissymétrie de l'encastrement ; ceci est surtout visible à 8 et 50 Hertz .

Le nez de l'aile n'est pas fixe, par contre à 18 et 50 Hertz, les amplitudes des points 5 et 6 sont très faibles . On peut donc penser qu'il aurait été plus judicieux d'avoir un point de mesure au nez de l'aile , de masse assez importante plutôt qu'aux emplacements 5 et 6 . Ce choix aurait évité l'effet de paramètre caché qu'il semble avoir joué, surtout aux deux dernières fréquences .

A la sixième fréquence propre, Nous remarquons, qu'entre les points 2 et 3 , il existe un ventre de vibration non excité, tous les autres points de mesure étant voisins des lignes nodales .

Ces considérations montrent qu'une meilleure disposition des excitateurs et capteurs aurait vraisemblablement permis de mieux obtenir les deux dernières résonances de phase, c'est-à-dire d'obtenir l'approximation à six degrés de liberté .

Matrices de couplage 4.4

Matrice β :

La diagonale principale de β est prédominante et on peut considérer cette matrice comme sensiblement symétrique aux erreurs de mesure près .

La grandeur des termes 2, 3 et 24, par rapport aux termes diagonaux, nous oblige à affirmer que l'hypothèse de Basile (Découplage complet dans la base propre) n'est pas acceptable, même à titre d'approximation pour la structure étudiée.

Le fait que la structure ne soit pas parfaitement symétrique , ceci à cause de la fixation, est décelable sur la matrice β , dont certains termes devraient manifestement être nuls .

En effet, une symétrie complète d'un système 4,4 se traduirait pour $\tilde{Z}$ et $\tilde{F}\Omega^{-1}$ par les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & u & u & 1 \\ v & 1 & -1 & -v \\ w & 1 & 1 & -w \\ s & -t & t & -s \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{F}\Omega^{-1} = B\tilde{Z} = \begin{bmatrix} A & B & -C & D \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \alpha & -\beta & \gamma & \delta \\ A & -B & -C & -D \end{bmatrix}$$

soit pour $\beta = \tilde{Z}\tilde{F}\Omega^{-1}$ par des zéros pour les termes {1,2} {1,4}, {2,3} et {3,4}

$$\begin{bmatrix} X & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 0 & X \\ X & 0 & X & 0 \\ 0 & X & 0 & X \end{bmatrix}$$

Il nous paraît intéressant de considérer la suite des matrices β obtenues en ne tenant compte que d'un point de mesure puis de 2, etc... On obtient la suite :

$$[0,801] ; \begin{bmatrix} 1,3 & 2,22 \\ 2,85 & 5,04 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2,27 & 1,3 & 0,97 \\ 1,84 & 6,1 & -5,6 \\ 0,01 & -3 & 6,8 \end{bmatrix}$$

Si nous comparons avec la matrice 4,4 précédente, nous constatons que si la symétrie apparaît rapidement, la convergence de chaque terme est lente. L'approximation à un ordre supérieur à 4 est plutôt une cause d'erreur si les colonnes forces sont mal déterminées (Comparer β à l'ordre 4 et à l'ordre 6).

Matrice B , M, K

Ces trois matrices se présentent sous la forme

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}$$

Les sous-matrices A et B sont du même ordre de grandeur et traduisent la symétrie grossière entre les deux côtés de l'aile, le couplage massique entre 1,2 et 3,4 étant faible.

La sous-matrice C a ses éléments deux à cinq fois plus faibles que A en ce qui concerne les masses et de 2 à 10 fois en ce qui concerne les raideurs et l'amortissement. Nous pouvons considérer que l'axe de symétrie de l'aile est une zone de faibles échanges d'énergie.

$$\begin{array}{ccc} & \div & \\ \div & & \div \\ & \div & \end{array}$$

CONCLUSION GENERALE

Arrivé aux dernières pages de ce rapport, nous allons résumer en quelques mots nos idées sur les développements de la méthode que nous proposons.

Il nous paraît intéressant d'envisager l'automatisation, au moins partielle, de la recherche du vecteur force optimum. A cet effet, l'article de Hawkins (voir Bibliographie R F M n° 14, page 37 à p. 41) peut être un intéressant point de départ. Cet auteur décrit un système automatique développé au R A E pour l'étude des vibrations des structures aux fréquences de résonance ω_i , le déphasage entre force et déplacement étant exactement de $\frac{\pi}{2}$. La résonance de phase locale est d'abord obtenue manuellement en un point. Le contrôle de la fréquence est assuré en ce point particulier de façon à conserver la condition de résonance; la résonance est alors recherchée en un autre point i . Lorsqu'elle est obtenue, un asservissement sur la force F_i , commandé par la réponse X_i , la maintient et ainsi de suite pour tous les autres points.

Il est peut-être possible de construire un asservissement plus poussé ne nécessitant aucune approche manuelle; nous estimons cependant que le choix du vecteur force initial influe beaucoup sur la vitesse d'obtention de la résonance de phase. Choisir le signe de F évite déjà tout un problème de commutation et la convergence d'un vecteur force absolument quelconque vers le vecteur force optimum ne nous semble pas assurée.

Nous terminerons en disant que dans notre méthode, la détermination de la matrice β , point de départ de tous les calculs ultérieurs, a une importance qu'on ne doit pas négliger. C'est un critère de précision. La détermination de la $i^{\text{ème}}$ colonne de β ne fait intervenir que la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\dots$. Or, pour un système linéaire, β est symétrique; ainsi, comme les β_{ij} sont calculés indépendamment des β_{ji} , toute dissymétrie constatée est l'indice, soit d'un comportement anormal de la structure, soit de mesures erronées.

$$\begin{array}{c} \div \\ \div \quad \div \\ \div \end{array}$$

BIBLIOGRAPHIE

La Recherche Aéronautique

Matrice des Masses :

- n° 30 - Sondage des Systèmes vibrant par masses additionnelles - De VRIES - 1952
- n° 50 - Modification des formes propres d'une structure par l'addition de masses concentrées - LECLERC - 1956
- n° 57 - Détermination des masses équivalentes des divers modes propres d'une structure en un de ses points - LECLERC - 1957
- n° 59 - n° 69 - Glissement de fréquences propres d'un système surchargé - GAUZY - 1957
1959
- n° 79 - Possibilité de généralisation de la méthode des fréquences déplacées - KAPPUS - 1960
- n° 101 - Masse généralisée à partir de la mesure de la phase - GAUZY - 1964
- n° 106 - Modes propres de vibrations à partir d'essais dans deux configurations différentes - CLERC et FEIX - 1965

Matrice des raideurs :

- n° 92 - Les raideurs électriques et leur emploi dans les essais de vibrations - de VRIES - 1963

Matrice d'amortissement :

- n° 61 - Influence de l'amortissement interne sur la vitesse critique de flottement - SALAUN - 1957
- n° 69 - Matrice d'amortissement structural - SALAUN - 1959
- n° 92 - Influence des frottements secs dans les gouvernes lors de l'essai de vibrations au sol - SALAUN et GAUZY - 1963
- n° 101 - La discrimination des modes propres voisins lors de l'essai de vibrations harmoniques - BEATRIX - 1964

Méthode globale :

- n° 85 - n° 87 - Une méthode d'appropriation des forces d'excitation aux modes propres non amortis d'une structure - CLERC - 1961
- n° 74 - - Emploi de la méthode vectorielle d'analyse dans les essais de vibrations - de VRIES - 1962
1960
- n° 95 - Remarques sur l'analyse des courbes d'admittance d'une structure mécanique - de VRIES - 1963 -

- n° 102 - Le problème de l'appropriation des forces d'excitation dans l'essai de vibrations - de VRIES - - 1964
- n° 108 - Les principes de l'essai global de vibrations d'une structure - de VRIES - - 1965
- n° 109 - Les procédés expérimentaux de l'essai global de vibrations d'une structure - BEATRIX - - 1965

Déphasages caractéristiques et vibrations forcées d'un système amorti - ACADEMIE ROYALE de BELGIQUE - Bull. de la classe des Sciences - Série 5 XXXIV 1948 - Page 626- 641 - FRAEIJIS de VEUBEKE

Analyse de la réponse forcée des systèmes amortis par la méthode des déphasages caractéristiques - Revue Française de Mécanique - 1er trimestre 1965 - n° 14 - page 49 - 58 - FRAEIJIS de VEUBEKE .

Ann automatic resonance testing technique for exciting normal modes of vibrations of complex structures . Revue Française de Mécanique - 1er trimestre 1965 n° 14 - page 37 à 41 - HAWKINS -

TABLE DES MATIERES

	Pages
Introduction	
Première partie -	
Analyse harmonique des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté par la « Méthode de réponse équiphasé »	1
Chapitre I - ETUDE MATHEMATIQUE DES SOLUTIONS dans la BASE PROPRE	2
1 - Etude du problème quand l'hypothèse de Basile est vérifiée	4
- Courbe $\alpha(\omega)$	5
- Courbe $\varphi(\omega)$	6
2 - Etude du problème lorsque l'hypothèse de Basile n'est pas vérifiée	7
2-1 Systèmes d'ordre deux	7
2-2 Systèmes d'ordre n	14
2.2.1 Démonstration de la propriété fondamentale	14
2.2.2 Etude de l'équation en α	17
Résultat de l'étude en fonction des variables α et ω	18
Résultat de l'étude en fonction des variables u et v	18
Chapitre II - TRANSPOSITION DES RESULTATS DANS UNE BASE QUELCONQUE	21
CONCLUSION de l'ETUDE THEORIQUE	23
Annexe à la Première Partie	25
Etude de l'équation $E(\alpha, \omega)$	25
- En fonction des variables α et ω	28
- En fonction des variables u et v	33
Deuxième partie -	
Vérifications expérimentales	37
§ 1 - ETUDE DE DEUX SYSTEMES MECANQUES COUPLES A L'AIDE D'UN DISPOSITIF D'EXPLORATION DES SORTIES VOIE PAR VOIE	39
Chapitre I - APPLICATION DE LA METHODE DE REPONSE EQUIPHASE A L'ETUDE D'UN SYSTEME A DEUX DEGRES DE LIBERTE COUPLES GYROSCOPIQUEMENT	39
1 - Description du système mécanique	39
2 - Description du dispositif d'excitation	40
2-1 Chaîne d'excitation	40
2-2 Chaîne de mesures	41

3 - Résultats expérimentaux	42
3-1 Tableau de mesures	43
3-2 Exploitation des résultats expérimentaux	47
Calcul des coefficients des matrices et des fréquences propres	47
3-3 Valeurs des coefficients donnés par d'autres méthodes	
3-3-1 - Equation des petits mouvements en régime stationnaire	48
3-3-2 - Détermination des coefficients des matrices par des méthodes classiques	49
4 - Conclusions	50
4-1 Comparaison des courbes $E(\alpha; \omega)$ avec les courbes théoriques	50
4-2 Précision des résultats	50
 Chapitre II - APPLICATION DE LA METHODE DE REPONSE EQUIPHASE A L'ETUDE	
D'UN SYSTEME COUPLE à 4 DEGRES DE LIBERTE : Etude d'une	51
poutre large encastrée à une extrémité	
1 Description du système mécanique	51
2 Description du dispositif de mesures	52
3 Résultats expérimentaux	55
4 Conclusions	60
 § 2 - ETUDE D'UN DISPOSITIF ELECTRONIQUE DE SOMMATION DE	
DEPHASAGES - APPLICATION A LA RECHERCHE DES MATRICES	63
DE COUPLAGE D'UN SYSTEME CONTINU SCHEMATISE PAR UN	
SYSTEME A SIX DEGRES DE LIBERTE .	
Preliminaire	63
 Chapitre I - DESCRIPTION DU SOMMATEUR DE DEPHASAGES	63
1 - Principe de fonctionnement	63
2 - Schéma fonctionnel	66
3 - Réalisation à l'aide de circuits logiques	67
3-1 Discriminateur.	67
3-2 Circuit de commandes de référence	67
3-3 Circuits et	68
3-4 Circuits lever de doute	68
3-5 Circuit ou	68
 Annexe au chapitre I -	71
 Chapitre II - DETERMINATION DES MATRICES DE COUPLAGE D'UNE PLAQUE	
TRIANGULAIRE	75
1 - Description du système étudié	75
2 - Schéma fonctionnel de l'ensemble	75

3 - Résultats expérimentaux	78
3-1 Séquence de mesures à effectuer	78
3-2 Tableau de mesures - Courbes $E(u,v)$ Matrices $\mathcal{X}, \mathcal{Z}$	78
3-3 Exploitation des résultats	84
4 - Conclusion	86

Conclusion générale	89
---------------------	----

Bibliographie	91
---------------	----

Deuxième Thèse

Propositions données par la Faculté :

ETUDE DE LA STABILITE PAR LE SECOND THEOREME DE LJAPOUNOV

VU

Le Directeur de Thèse

Président du Jury

Y. PIRONNEAU

VU et APPROUVE

Nantes, le **25 MAI 1966**

Le Doyen de la Faculté des Sciences

G. BRILLOUET

VU et PERMIS d'IMPRIMER

Nantes, le **25 MAI 1966**

Le Recteur de l'Académie de Nantes

Président du Conseil de l'Université,

M. SCHMITT

